PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

17 novembre 2004

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ________ *Cognome* ________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) Se $\sqrt{a^2+1}=b$, quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a \geq 0$, **(B)** $b \geq 0$, **(C)** $a > 1$, **(D)** $b \geq a^2+1$, **(E)** nessuna delle precedenti.

2) Su Marte la moda dei telefoni cellulari sta rapidamente prendendo piede. Il 17 novembre 10 marziani possiedono un cellulare e nei giorni successivi il numero dei marziani che possiedono un cellulare raddoppia ogni giorno. Quale è il primo giorno al termine del quale almeno 10000 marziani avranno un cellulare?
(A) 25 novembre, **(B)** 26 novembre, **(C)** 27 novembre, **(D)** 28 novembre, **(E)** 29 novembre.

3) Tarzan vuole tenere il suo leone in una radura di forma circolare avente raggio 12 metri e con un alto albero nel centro. Per fare in modo che il leone non scappi, lo lega con una catena all'albero centrale, ma al momento di fissarla si accorge che la catena è lunga 13 metri anziché 12. Non potendo in alcuna maniera accorciare la catena, decide di legarla più in alto, in modo che il leone possa raggiungere il limite della radura, senza uscirne. A quanti metri di altezza dal suolo Tarzan lega la catena? (Solo per questo esercizio si trascurino le dimensioni del leone).
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** 5.

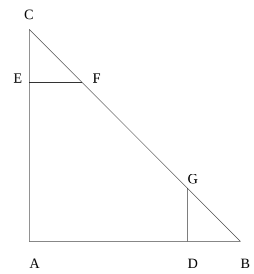
4) a, b e c sono tre numeri naturali. Sappiamo che a è divisibile per 15, b è divisibile per 12 e c è divisibile per 21. Quale delle seguenti affermazioni è certamente vera?
(A) $a^2+b^2+c^2$ è divisibile per 18, **(B)** $a+b+c$ è divisibile per 9, **(C)** $a+b+c$ è divisibile per 2, **(D)** $(a+b+c)^2$ è divisibile per 9, **(E)** $a^2+b^2+c^2$ è divisibile per 15.

5) Il valore minimo di $a \geq 0$ per cui l'equazione

$$x^2+ax+a+1=0$$

ha almeno una soluzione reale è
(A) $2\sqrt{2}+2$, **(B)** $2\sqrt{2}-2$, **(C)** $3\sqrt{3}+3$, **(D)** $3\sqrt{2}-3$, **(E)** $2\sqrt{2}+3$.

6) Sia ABC un triangolo rettangolo isoscele come in figura, con cateti di lunghezza L. I segmenti DG e EF sono perpendicolari ai lati AB e AC rispettivamente, inoltre i segmenti AE e AD sono lunghi $\frac{3}{4}L$. Sapendo che l'area del pentagono $ADGFE$ è 7 metri quadrati, si può dire che L è uguale a
(A) 1,5 m, **(B)** 3 m, **(C)** 1,3 m, **(D)** 1,6 m, **(E)** 4 m.



7) Quanti sono i multipli di 5 fra i numeri interi di 4 cifre che si scrivono senza usare altre cifre all'infuori di 0, 1, 2, 3, 4, 5 ? (È consentito impiegare più volte la stessa cifra; 0 non può essere la cifra iniziale).
(A) 180, **(B)** 216, **(C)** 360, **(D)** 396, **(E)** 1080.

8) Marco deve recarsi una volta all'anno, per lavoro, in un lontano Paese dalla dissestata economia, nel quale da un anno all'altro i prezzi raddoppiano. Tuttavia la moneta di quel Paese perde ogni anno il 30 per cento del suo valore rispetto all'Euro. La spesa (in Euro) sostenuta da Marco per il suo soggiorno nel 2004 risulta pertanto
(A) minore di quella del 2002, **(B)** uguale a quella del 2002, **(C)** superiore a quella del 2002, ma minore del doppio di essa, **(D)** uguale al doppio della spesa del 2002, **(E)** uguale al quadruplo della spesa del 2002.

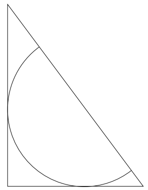
9) Quanti sono i numeri interi positivi n tali che $n^2-14n+24$ sia un numero primo?
(A) nessuno, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** nessuna delle precedenti risposte.

10) Una cassetta di legno, senza coperchio, è fabbricata con tavole spesse 2 cm. Se le dimensioni esterne della base (rettangolare) sono 38 cm e 44 cm e l'altezza esterna è 47 cm, di quanti centimetri cubi è il volume interno della cassetta?
(A) 61200 cm^3, **(B)** 63920 cm^3, **(C)** 68040 cm^3, **(D)** 75240 cm^3, **(E)** 78584 cm^3.

11) Quattro amici stanno conversando. Uno di loro dice: "Almeno due di noi sono bugiardi." Il secondo aggiunge: "È vero!" Il terzo ribatte: "Non è vero!" Quanti sono i bugiardi?
(A) 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** i dati sono incongruenti, **(E)** mancano i dati per poter rispondere.

12) Venti soffici cuscini quadrati sono impilati uno sopra l'altro. Ogni cuscino pesa 500g ed ha inizialmente uno spessore di 30cm. Nella pila, però, lo spessore si riduce in ragione di 2cm per ogni chilo di peso sopra di esso (1cm per ogni mezzo chilo). Quanto è alta la pila di cuscini?
(A) 220cm, **(B)** 410cm, **(C)** 490cm, **(D)** 581cm, **(E)** mancano dati per poter rispondere.

13) Sia dato un triangolo rettangolo i cui cateti misurano 21 e 28 cm e un semicerchio in esso inscritto come nella figura a fianco. Quanto misura l'area del semicerchio?
(A) 50π cm^2, **(B)** $\frac{441}{8}\pi$ cm^2, **(C)** 98π cm^2, **(D)** 72π cm^2, **(E)** $\frac{121}{2}\pi$ cm^2.



14) Quante sono le coppie (a,b) di numeri naturali tali che $a^2 - 4b^2 = 45$?
(A) nessuna, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** più di 3.

15) Una colonia di amebe si moltiplica in uno stagno. Inizialmente sono presenti un'ameba chiara e un'ameba scura; poi, ogni giorno per 2004 giorni consecutivi, una ameba a caso tra quelle esistenti (tutte hanno la stessa probabilità di essere scelte, indipendentemente dalla loro età) si divide in due amebe identiche al genitore. Qual è la probabilità che ci sia una sola ameba scura nello stagno alla fine del 2004° giorno?
(A) $1/2^{2004}$, **(B)** $1/2004$, **(C)** $1/2005$, **(D)** $1/(2004 \cdot 2005)$, **(E)** $2004/2005$.

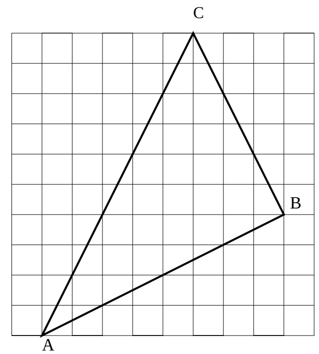
16) Quanti numeri interi relativi x risolvono l'equazione $(x^2 - x - 1)^{x+2} = 1$?
(A) 1 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** infiniti.

17) Nel quadrato $ABCD$ di lato 1 tracciamo la diagonale BD e il segmento CM, dove M è il punto medio di DA. Chiamiamo P il punto d'intersezione di BD e CM. Qual è l'area del triangolo DMP?
(A) 1/8, **(B)** 1/10, **(C)** 1/12, **(D)** 1/16, **(E)** nessuna delle precedenti.

18) Un intero si dice *parofilo* se l'espressione decimale di ogni suo multiplo termina con almeno due cifre pari. Determinare quale dei seguenti numeri è parofilo.
(A) 2004, **(B)** 2116, **(C)** 2122, **(D)** 2740, **(E)** 2942.

19) Alberto dice : "Sono piú vecchio io di Bruno"; Bruno risponde: "Carla è piú giovane di me" e Carla aggiunge: "ma io sono piú vecchia di Alberto". Una quarta persona afferma: "Sommando le età di Carla e Bruno si ottiene il doppio di quella di Alberto." Sapendo che una sola delle quattro affermazioni è falsa, come sono ordinate le età dei tre? (Nelle risposte a, b e c indicano le età di Alberto, Bruno e Carla rispettivamente).
(A) $a < b < c$, **(B)** $b < a < c$, **(C)** $c < a < b$, **(D)** $c < b < a$, **(E)** non si può determinare.

20) Quanto vale il raggio del cerchio inscritto nel triangolo ABC in figura, se l'unità di misura di lunghezza u è pari al lato di un quadratino?
(A) $\sqrt{2}\,u$, **(B)** $\sqrt{3}\,u$, **(C)** $2\,u$, **(D)** $\sqrt{5}\,u$, **(E)** $\sqrt{6}\,u$.



21) Una successione di numeri è costruita in questo modo: il primo termine è 1, il secondo è 2 e, a partire dal terzo termine, ogni termine è il prodotto dei due precedenti. Quanto vale il tredicesimo termine?
(A) 2^{12}, **(B)** 2^{83}, **(C)** 2^{144}, **(D)** 2^{2048}, **(E)** 2^{4096}.

22) Quante soluzioni positive ha l'equazione $1 + 1/(1 + 1/(1 + 1/x)) = x$?
(A) 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** infinite.

23) Su una striscia molto lunga sono scritte di seguito, in ordine alfabetico, tutte le parole di 4 lettere (incluse quelle prive di significato) ottenibili con le 21 lettere del nostro alfabeto a partire da AAAA. Qual è la 2004-esima lettera scritta?
(A) L, **(B)** M, **(C)** P, **(D)** T, **(E)** nessuna delle precedenti.

24) In un triangolo ABC si tracciano le bisettrici da B e da C che incontrano rispettivamente i lati AC e AB in D ed E. Detto I il punto di incontro delle bisettrici, si sa che il quadrilatero $IDAE$ è inscrivibile in una circonferenza. Allora l'angolo in A vale
(A) 30^o, **(B)** 45^o, **(C)** 60^o, **(D)** 90^o, **(E)** non si può determinare in modo univoco.

25) Pierino ha 10 mele, quattro delle quali sono marce. Egli le ripartisce in due sacchetti (non necessariamente lo stesso numero in ciascun sacchetto, ma non meno di 3 mele in ogni sacchetto), e propone ad un suo amico di scegliere un sacchetto, e successivamente di estrarre una mela dal sacchetto scelto. Come dovrà comporre i due sacchetti affinchè sia massima la probabilità che il suo amico estragga una mela marcia?
(A) La composizione non conta: la probabilità è in ogni caso 4/10, **(B)** due mele marce e tre buone in ciascun sacchetto, **(C)** tre mele marce e due buone in un sacchetto, le rimanenti cinque nell'altro, **(D)** tutte e quattro le mele marce in un sacchetto, le rimanenti sei nell'altro, **(E)** tre mele marce in un sacchetto, le rimanenti sette nell'altro.