PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Gara Triennio

Dedicati alla memoria di Franco Conti

19 novembre 2003

1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
4) Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è 1 ora e mezza. Buon lavoro e buon divertimento.

Nome ____________________ *Cognome* ______________________ *Classe* ______

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) $\dfrac{3^{5/2}}{3^{2/3}} = \ldots$ **(A)** $\frac{1}{3}$ **(B)** 3 **(C)** $3^{15/4}$ **(D)** $3^{11/6}$ **(E)** $3^{19/6}$.

2) Qual è il più grande degli interi positivi n tali che la media aritmetica dei numeri da 1 a n sia < 2003 ?
(Nota: la media aritmetica di n numeri è uguale alla loro somma divisa per n.)
(A) 2002 **(B)** 2003 **(C)** 4003 **(D)** 4004 **(E)** 4005.

3) È dato un triangolo (non degenere) i cui lati hanno come lunghezze i tre numeri naturali a, b e c. Sapendo che b e c sono multipli di a, cosa possiamo dire del triangolo?
(A) Ha sempre come area un numero intero
(B) ha sempre come area un numero razionale, ma non necessariamente intero
(C) è necessariamente isoscele
(D) potrebbe essere rettangolo
(E) non esistono triangoli siffatti.

4) In un'urna ci sono 9 palline, 3 bianche, 3 rosse e 3 blu. Tullio estrae contemporaneamente 3 palline. Qual è la probabilità che ne estragga una bianca, una rossa e una blu?
(A) $\frac{1}{27}$ **(B)** $\frac{1}{9}$ **(C)** $\frac{9}{28}$ **(D)** $\frac{6}{27}$ **(E)** $\frac{3}{14}$.

5) Un ciclista percorre una salita con velocità v costante e ridiscende per la stessa strada con velocità ancora costante ma pari al triplo della precedente. La velocità media nell'intero percorso di andata e ritorno è...
(A) $\frac{3}{4}v$ **(B)** $\frac{4}{3}v$ **(C)** $\frac{3}{2}v$ **(D)** $2v$ **(E)** dipende dalla lunghezza della strada.

6)

In questo rettangolo c'è esattamente una affermazione falsa.
In questo rettangolo ci sono esattamente due affermazioni false.
In questo rettangolo ci sono almeno tre affermazioni false.
In questo rettangolo ci sono al più tre affermazioni false.

Quante affermazioni vere ci sono nel rettangolo?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

7) Quali delle diseguaglianze a fianco sono verificate per ogni valore reale positivo di x?
(A) Tutte e tre **(B)** solo a) e b) **(C)** solo b) e c)
(D) solo a) **(E)** solo c).

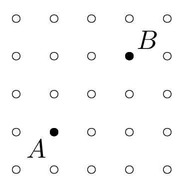
a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2} \geq 2$
b) $x^2 \geq 2x - 2$
c) $x^4 - 2x^3 + x^2 \geq 0$.

8) Michael, Juan Pablo e Kimi partecipano a un campionato di automobilismo. Dopo 5 gran premi, Michael conduce la classifica con 43 punti, seguito da Juan Pablo con 42 punti e da Kimi con 40. In ognuna delle 5 gare disputate, il primo classificato guadagnava 10 punti, il secondo 8, il terzo 7, dal quarto posto in poi non si guadagnavano punti. Basandovi su queste informazioni, sapreste dire chi si è piazzato al secondo posto per il maggior numero di volte?
(A) Michael **(B)** Juan Pablo **(C)** Kimi **(D)** Michael e Juan Pablo
(E) Michael e Kimi.

9) Un triangolo ha due vertici nei punti di coordinate $(-4,\ 1)$ e $(2,\ -1)$ e il terzo vertice nel punto di coordinate $(1,\ k)$. Per quanti valori reali di k tale triangolo risulta isoscele?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 4 **(D)** 5 **(E)** infiniti.

10) Un ragno vuole ispezionare la superficie esterna di una piramide a base quadrata, le cui facce laterali sono triangoli equilateri. Partendo dal centro di una faccia laterale, vuole toccare i centri di tutte le altre facce laterali, seguendo il cammino più breve possibile. Sapendo che uno spigolo della piramide misura 2, trovare la lunghezza totale del percorso.
(A) 4 **(B)** $2\sqrt{3}$ **(C)** 3 **(D)** $\frac{3}{2}\sqrt{2}$ **(E)** nessuna delle precedenti.

11) In un ampio laghetto le foglie di ninfea sono disposte a reticolo, come nella figura a fianco. I rospi sono soliti muoversi con balzi da una foglia ad una adiacente in orizzontale o verticale. Un rospo si trova in A ed avvista un insetto in B. Per catturarlo, compie una traiettoria di 6 balzi (senza mai passare due volte sulla stessa foglia) che termina in B. Quante traiettorie diverse può aver compiuto?
(A) 24 **(B)** 26 **(C)** 28 **(D)** 32 **(E)** nessuna delle precedenti.



12) Una stazione spaziale vuole registrare il passaggio di un asteroide, che si muove nello spazio di moto rettilineo uniforme rispetto ad essa. Purtroppo il radar della stazione è danneggiato, e non fornisce misure affidabili della distanza, mentre misura con accuratezza l'angolo sotto il quale è visto l'asteroide. Vengono effettuati alcuni rilevamenti a intervalli di tempo regolari. Qual è il minimo numero di rilevamenti necessari per ricostruire la traiettoria dell'asteroide?
(A) 2 **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** un numero finito maggiore di 4
(E) nessun numero di rilevamenti è sufficiente.

13) Date le uguaglianze a sinistra, quale delle affermazioni a destra è vera?

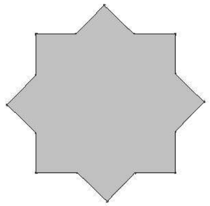
(I) $\dfrac{x^3-5x^2}{x^2}=\dfrac{3x-15}{3}$,
(II) $\dfrac{x-5}{1/2}=\dfrac{3x-15}{3/2}$,
(III) $\dfrac{x-5}{2}=x-\dfrac{5}{2}$

(A) (I), (II) e (III) sono vere per ogni x reale
(B) (I), (II) e (III) sono false per ogni x reale
(C) per ogni x reale, se (II) è vera lo è anche (III)
(D) per ogni x reale, se (II) è vera lo è anche (I)
(E) per ogni x reale, se (I) è vera allora (III) è falsa.

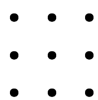
14) Quanti sono i numeri interi positivi n per i quali $8n+50$ è un multiplo di $2n+1$?
(A) Nessuno **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 5 **(E)** 10.

15) Se vale l'identità $\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\left(x-\frac{1}{2}\right)^3+(x+1)^3+(x+2)^3=ax^3+bx^2+cx+d$, quanto vale $a+b+c+d$?
(A) $\dfrac{57}{4}$ **(B)** 9 **(C)** $\dfrac{289}{8}$ **(D)** 35 **(E)** nessuno dei valori precedenti.

16) Determinare l'area del poligono ottenuto come unione di due quadrati entrambi aventi lato di lunghezza 1, aventi lo stesso centro e ruotati di 45° l'uno rispetto all'altro.
(A) $4-2\sqrt{2}$ **(B)** $\dfrac{9}{8}$ **(C)** $2-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(D)** $\dfrac{5}{4}$
(E) le precedenti risposte sono sbagliate.



17) Sono dati 9 punti disposti a quadrato come nella figura a fianco. Quanti sono i possibili triangoli non degeneri che hanno i vertici in tre dei punti dati?
(A) 27 **(B)** 56 **(C)** 60 **(D)** 76 **(E)** 84.

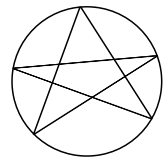


18) Giovanni ha bevuto troppo e comincia a camminare in modo strano:
– fa 1 passo in avanti;
– poi si volta di 90° verso destra e fa 2 passi in avanti;
– poi si volta di 90° verso destra e fa 1 passo in avanti;
– poi si volta di 90° verso sinistra e fa 1 passo all'indietro;
– dopo di che ricomincia da capo.
Ogni passo è di 1 metro. Dopo 186 passi cade a terra svenuto. A quanti metri da dove era partito finisce la passeggiata di Giovanni?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** $\sqrt{5}$ **(E)** 4.

19) Anna e Marco hanno una collezione di più di 40, ma meno di 80, cartoline. Anna nota che il numero delle cartoline meno 3 è multiplo di 8. Marco invece nota che il numero di cartoline meno 1 è multiplo di 5. Quante cartoline hanno in totale Anna e Marco?
(A) Tra 40 e 49 **(B)** tra 50 e 59 **(C)** tra 60 e 69 **(D)** tra 70 e 79
(E) è impossibile: hanno sbagliato a contare.

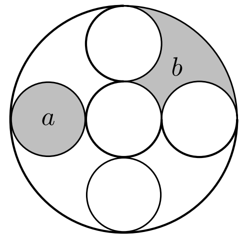
20) Il polinomio $x^4-2x^3-7x^2-2x+1$ ha quattro radici reali a, b, c, d. Quanto vale $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$?
(A) -2 **(B)** 0 **(C)** -1 **(D)** 2 **(E)** nessuno dei valori precedenti.

21) Sia data una stella a cinque punte inscritta in una circonferenza. Quanto vale la somma degli angoli con vertice nelle punte della stella?
(A) 100° **(B)** 150° **(C)** 180° **(D)** 200°
(E) i dati a disposizione sono insufficienti.



22) Si consideri l'insieme $\{1,2,\ldots,2003\}$. Quanti sono i suoi sottoinsiemi B tali che la somma degli elementi di B è uguale a 2 007 000?
(A) Non ne esistono **(B)** 3 **(C)** 4 **(D)** 1002 **(E)** 2003.

23) Dette a e b le aree delle figure in grigio, dire quale fra le seguenti relazioni è valida (tutti i cerchi piccoli hanno lo stesso raggio r e i 4 tangenti a quello grande hanno i centri sui vertici di un quadrato).
(A) $a<b$, qualunque sia r **(B)** $a=b$, qualunque sia r
(C) $a>b$, qualunque sia r
(D) $a<b$ oppure $a=b$, dipende dal valore di r
(E) $a>b$ oppure $a=b$, dipende dal valore di r.



24) Il potente computer di Enrico è stato da poco infettato da un virus che cancella un po' alla volta tutta la memoria. Ogni minuto che passa, la regione cancellata viene quadruplicata, e ulteriormente incrementata di 1 byte. Enrico congela il computer quando ormai la situazione è compromessa: egli calcola che non solo tra un minuto il virus avrà corrotto tutta la memoria, ma anzi ormai basterebbe triplicare la regione cancellata e aggiungere 1 byte per esaurire esattamente la memoria del computer, che ammonta a 2.5 Gb $=2.5\cdot 2^{30}$ byte. Quanto era grande la regione cancellata 14 minuti fa?
(A) 1 byte **(B)** 2 byte **(C)** 3 byte **(D)** 4 byte **(E)** 16 byte.

25) Sul triangolo ABC si costruisce una piramide di vertice V e base ABC. P è un punto sullo spigolo VA tale che BP e CP siano fra loro ortogonali e siano altezze rispettivamente dei triangoli BAV e CAV. Sapendo che P divide VA in due segmenti di lunghezza 1 cm e 2 cm e che le altezze BP e CP sono lunghe rispettivamente 3 cm e 4 cm, determinare il volume (in cm^3) della piramide.
(A) I dati non sono sufficienti per calcolare il volume **(B)** 6 **(C)** 9 **(D)** 12
(E) non esiste una piramide siffatta.