PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

23 novembre 2005

1 Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	B
2	E
3	C
4	B
5	B
6	D
7	B
8	A
9	D
10	B
11	C
12	B
13	C
14	B
15	C
16	D
17	A
18	E
19	A
20	A
21	B
22	C
23	D
24	C
25	D

2 Risoluzione dei problemi

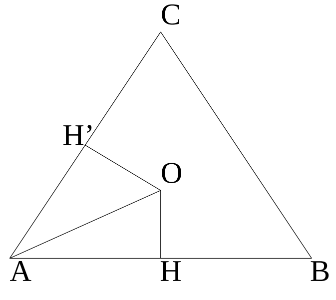
1. La risposta è **(B)**. $a(b+c)-b(a+c)=c(a-b)$. Per rendere il più grande possibile questo numero scegliamo b più piccolo possibile, cioè $b=1$. Per rendere massimo $c(a-1)$ dobbiamo scegliere a e c più grandi possibili, compatibilmente con il fatto che devono essere minori o uguali a 10 e distinti. Per $a=10$ e $c=9$ si ottiene 81 mentre per $a=9$ e $c=10$ si ottiene 80. Quindi 81 è il valore massimo che possiamo ottenere.

2. La risposta è **(E)**. Osserviamo che $n^3+2n^2+n=n(n^2+2n+1)=n(n+1)^2$. Se in particolare $n=k^2$ è un quadrato perfetto (k numero intero), allora $n^3+2n^2+n=k^2(k^2+1)^2=(k(k^2+1))^2$ è un quadrato perfetto. Quindi i numeri n per cui la proprietà richiesta è vera sono infiniti.

3. La risposta è **(C)**. Prima soluzione. L'uguaglianza $a+b=ab$ equivale a $(a-1)(b-1)=1$ quindi i fattori $a-1$ e $b-1$ devono coincidere entrambi con 1 oppure coincidere entrambi con -1. Il primo caso porta alla coppia $(a=2, b=2)$; il secondo porta alla coppia $(a=0, b=0)$. Le coppie che verificano la proprietà richiesta sono in tutto due.
Seconda soluzione. Deve essere $ab=a+b$; osserviamo che la coppia $(0,0)$ verifica questa uguaglianza. Inoltre se $a=0$ allora $0=0+b$ e dunque anche $b=0$; allo stesso modo si vede che se $b=0$ allora $a=0$. Quindi se vogliamo cercare altre soluzioni oltre $(0,0)$ possiamo supporre che a e b siano entrambi diversi da zero. Allora $b=1+\dfrac{b}{a}$ quindi a divide b; allo stesso modo $a=\dfrac{a}{b}+1$ e quindi b divide a. L'unica possibilità è allora che $a=\pm b$. Se $a=b$ allora $a^2=2a$ cioè $a=2$ e otteniamo così una seconda soluzione data da $(2,2)$. Se $a=-b$ allora $-a^2=0$ cioè $a=0$, ma questo ci riporta alla soluzione $(0,0)$ già trovata. In conclusione le coppie che verificano la proprietà richiesta sono due: $(0,0)$ e $(2,2)$.

4. La risposta è **(B)**. I numeri in questione sono compresi tra 1000 e 1999. Affinchè tre cifre siano uguali può accadere che: 1) il numero sia della forma $1AAA$ dove A può essere $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$; di questi numeri ve ne sono 10. 2) Il numero sia della forma $1A11$ oppure $11A1$ oppure $111A$ dove A può essere $0,2,3,4,5,6,7,8,9$ (escludiamo $A=1$ per evitare che il numero 1111 venga contato più di una volta); per ciascuna delle 3 posizioni di A vi sono 9 possibilità, quindi i numeri di questo tipo sono 27 (distinti da quelli della forma $1AAA$ già considerati). Complessivamente ci sono $10+27=37$ numeri con la proprietà richiesta.

5. La risposta è **(B)**. Facendo riferimento alla figura, consideriamo i due lati consecutivi CA e AB. I segmenti HO e $H'O$ appartengono agli assi di AB e CA rispettivamente, O è il punto di incontro di questi assi con la bisettrice di $\widehat{CAB}$. I triangoli AHO e $AH'O$ hanno entrambi un angolo retto e hanno un angolo uguale: $\widehat{H'AO}=\widehat{HAO}$, quindi hanno tutti gli angoli uguali; inoltre hanno il lato AO in comune e dunque si tratta di triangoli congruenti. Conseguentemente, AH e AH' hanno la stessa lunghezza; quindi anche AB e CA hanno la stessa lunghezza, poichè H e H' sono i punti medi di AB e CA rispettivamente (gli assi incontrano i lati nei punti medi). Questo ragionamento può essere ripetuto per i lati AB e BC che quindi sono uguali. In conclusione i lati del triangolo ABC sono tutti uguali tra loro e quindi il triangolo è equilatero.



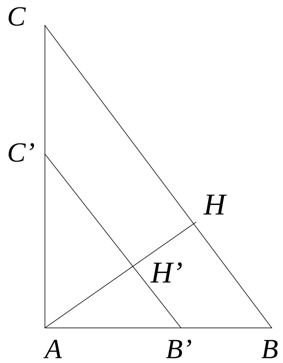
6. La risposta è **(D)**. Se $2n$ divide $n+30$ allora $n+30=qn$ per un opportuno numero naturale $q\neq 0$ e quindi $30=n(q-1)$; ne segue che n è un divisore di 30. I divisori di 30 sono: $1,2,3,5,6,10,15,30$. D'altra parte, se $2n$ divide $n+30$ allora in particolare 2 divide $n+30$ che deve quindi essere pari; poichè 30 è pari, questo vuol dire che n deve essere pari. Quindi n può essere: $2,6,10,30$; a questo punto possiamo controllare tutte le possibilità: se $n=2$, $2n=4$ divide $n+30=32$; se $n=6$, $2n=12$ divide $n+30=36$; se $n=10$, $2n=20$ divide $n+30=40$; se $n=30$, $2n=60$ divide $n+30=60$. Per i quattro valori possibili $2,6,10,30$ la proprietà richiesta risulta verificata.

7. La risposta è **(B)**. Indichiamo con X, Y, Z la prima, la seconda e la terza cifra del lucchetto. Per risolvere il problema si devono contare tutte le possibili terne ordinate (X, Y, Z) tali che $X + Y + Z = 10$. Se $X = 0$ deve essere $Y + Z = 10$; in questo caso né Y né Z possono essere 0, Y può assumere tutti i valori compresi tra 1 e 9, estremi inclusi, e per ciascuna scelta di Y il valore di Z è determinato: $Z = 10 - X$; ci sono quindi 9 terne con $X = 0$. Se $X = 1$, allora $Y + Z = 9$, Y può assumere tutti i valori compresi tra 0 e 9, estremi inclusi, e Z è conseguentemente determinata; ci sono allora 10 terne con $X = 1$. Si può procedere in questo modo trovando che ci sono 9 terne con $X = 2$, 8 con $X = 3$, e così via fino a 2 terne con $X = 9$. Il numero complessivo delle terne è allora $9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 = 63$.

8. La risposta è **(A)**. Per il Teorema di Pitagora, l'ipotenusa BC misura 5 m. Sia AH l'altezza di ABC relativa all'ipontenusa BC. Uguagliando le formule per calcolare l'area di ABC:

$$\text{area}(ABC) = \frac{1}{2}\overline{BC} \cdot \overline{AH} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6\,\text{m}^2\,,$$

possiamo calcolare AH che misura allora $(6 \cdot 2)/5$ m $= 12/5$ m. Il triangolo $AB'C'$ è simile al triangolo ABC; inoltre, poichè le due rette che contengono BC e $B'C'$ sono parallele e hanno distanza 1, l'altezza AH' di $AB'C'$ relativa all'ipotenusa $B'C'$ è $\left(\frac{12}{5} - 1\right)$ m $= \frac{7}{5}$ m.



Quindi $\dfrac{\overline{AH}}{\overline{AH'}} = \dfrac{12/5}{7/5} = \dfrac{12}{7}$. Il rapporto tra le ipotenuse dei due triangoli ha lo stesso valore, quindi $\overline{B'C'} = \dfrac{7}{12}\overline{BC} = \dfrac{35}{12}$ m. L'area di $AB'C'$ è data da

$$\frac{\overline{B'C'} \cdot \overline{AH'}}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{35}{12}\right)\left(\frac{7}{5}\right)\ \text{m}^2 = \frac{49}{24}\text{m}^2\,.$$

9. La risposta è **(D)**. Affinchè $n - 52$ e $n + 53$ siano quadrati perfetti devono esistere due numeri naturali h e k tali che

$$\begin{cases} n - 52 = h^2\,, \\ n + 53 = k^2\,. \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla seconda otteniamo $k^2 - h^2 = 52 + 53$ e dunque $(k-h)(k+h) = 105$. Poichè $h, k \geq 0$, si deve avere $k + h \geq k - h$. Il numero 105 può essere scritto come prodotto di due numeri naturali nei quattro modi seguenti: $105 = 1 \cdot 105 = 3 \cdot 35 = 5 \cdot 21 = 7 \cdot 15$. Di conseguenza h e k devono risolvere uno dei sistemi:

$$\begin{cases} k - h = 1 \\ k + h = 105 \end{cases}, \begin{cases} k - h = 3 \\ k + h = 35 \end{cases}, \begin{cases} k - h = 5 \\ k + h = 21 \end{cases}, \begin{cases} k - h = 7 \\ k + h = 15 \end{cases}.$$

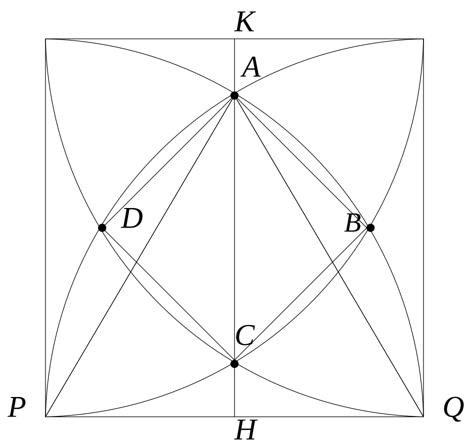
Le possibilità sono allora: $(h = 52, k = 53)$, $(h = 16, k = 19)$, $(h = 8, k = 13)$, $(h = 4, k = 11)$. In corrispondenza di ciascuna di queste possibilità si ottiene, utilizzando ad esempio $n-52 = h^2$, un valore di n e i valori sono distinti. In tutto ci sono quindi 4 scelte di n per cui la proprietà richiesta è verificata.

10. La risposta è **(B)**. Prima soluzione. Sottraiamo e sommiamo $4a^2$ all'espressione contenuta nel problema,

$$0 = 2a^4 - 4ab + b^2 + 2 = 2a^4 - 4a^2 + 2 + b^2 + 4a^2 - 4ab = 2(a^2 - 1)^2 + (2a - b)^2 .$$

Abbiamo allora che la somma di due numeri maggiori o uguali a zero, cioè: $2(a^2-1)^2$ e $(2a+b)^2$, è zero; l'unica possibilità è che entrambi questi numeri siano uguali a zero: $2(a^2 - 1)^2 = 0 \Rightarrow a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$ e $(2a + b)^2 = 0 \Rightarrow 2a + b = 0 \Rightarrow b = -2a$. Le coppie (a, b) per cui l'equazione è verificata sono $(1, -2)$ e $(-1, 2)$; a può assumere solo due valori distinti.
Seconda soluzione. Fissato a, b è soluzione dell'equazione di secondo grado in x: $x^2 - 4ax + 2a^4 + 2 = 0$; affinchè quasta equazione abbia una soluzione (reale) il suo discriminante deve essere maggiore o uguale a zero; d'altra parte il discriminante è $16a^2 - 8a^4 - 8 = -8(a^2 - 1)^2$ che è minore o uguale a zero per qualunque scelta di a. L'unica possibilità è allora che il discriminante sia uguale a zero e questo accade per $a^2 = 1$ cioè per $a = \pm 1$.

11. La risposta è **(C)**. Con riferimento alla figura, osserviamo che il triangolo APQ è equilatero e ha lato di lunghezza 10 m. Possiamo allora calcolare la sua altezza AH: $\overline{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{PQ} = \frac{\sqrt{3}}{2}10$ m$= 5\sqrt{3}$ m, e $\overline{AK} = \overline{CH} = \overline{KH} - \overline{AH} = (10 - 5\sqrt{3})$ m. Allora abbiamo anche: $\overline{AC} = \overline{AH} - \overline{CH} = (5\sqrt{3} - (10 - 5\sqrt{3}))$ m $= 10(\sqrt{3} - 1)$ m. Il quadrilatero $ABCD$ è un quadrato, ha infatti tutti i lati di uguale lunghezza e le diagonali di uguale lunghezza, per le proprietà di simmetria della figura. La lunghezza del suo lato AB è pari alla lunghezza della sua diagonale AC divisa per $\sqrt{2}$, cioè: $\overline{AB} = \frac{10(\sqrt{3} - 1)}{\sqrt{2}}$ m $= 5(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ m.



12. La risposta è **(B)**. Carlo sa che la lista delle soluzioni corrette è una permutazione della lista: $AAABBBCCDD$; per capire quante possibilità ha di rispondere correttamente a tutte le risposte, occorre contare le possibili liste distinte ottenute da questa mediante una permutazione. Le possibili permutazioni di una lista di 10 simboli sono 10!. D'altra parte in questo caso si possono avere permutazioni distinte che portano a liste uguali, ovvero si possono avere delle ripetizioni: le tre A danno luogo a 3! ripetizioni; analogamente, le tre B danno luogo a 3!

ripetizioni e sia le due C che le due D danno luogo a $2! = 2$ ripetizioni. Il numero totale di permutazioni che vanno condiderate è:

$$\frac{10!}{3\,!3!\,2!\,2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 = 90 \cdot 280 = 25200\,.$$

La probabilità cercata è allora $\dfrac{1}{25200}$.

13. La risposta è **(C)**. Se N è un numero con la proprietà richiesta, N deve essere un quadrato perfetto compreso tra 1 e 100, estremi inclusi, quindi le possibilità per N sono:

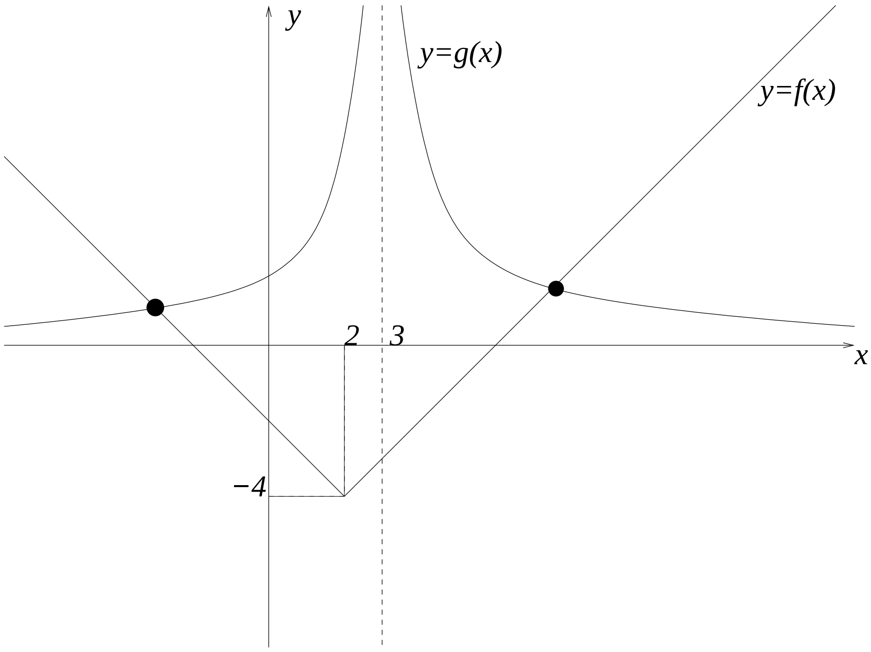
$$N = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\,.$$

Abbiamo:

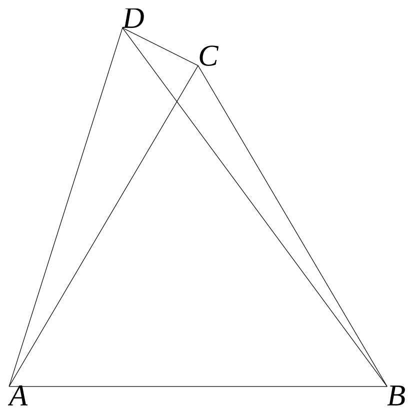
$$\begin{aligned}
&N = 1\,, \quad \text{divisori}: \{1\}\,,\ \text{numero di divisori: } 1\,,\ 1 = 1^2\\
&N = 4\,, \quad \text{divisori}: \{1,2,4\}\,,\ \text{numero di divisori: } 3\,,\ 4 \neq 3^2\\
&N = 9\,, \quad \text{divisori}: \{1,3,9\}\,,\ \text{numero di divisori: } 3\,,\ 9 = 3^2\\
&N = 16\,, \quad \text{divisori}: \{1,2,4,8,16\}\,,\ \text{numero di divisori: } 5\,,\ 16 \neq 5^2\\
&N = 25\,, \quad \text{divisori}: \{1,5,25\}\,,\ \text{numero di divisori: } 3\,,\ 25 \neq 3^2\\
&N = 36\,, \quad \text{divisori}: \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}\,,\ \text{numero di divisori: } 9\,,\ 36 \neq 9^2\\
&N = 49\,, \quad \text{divisori}: \{1,7,49\}\,,\ \text{numero di divisori: } 3\,,\ 49 \neq 3^2\\
&N = 64\,, \quad \text{divisori}: \{1,2,4,8,16,32,64\}\,,\ \text{numero di divisori: } 7\,,\ 64 \neq 7^2\\
&N = 81\,, \quad \text{divisori}: \{1,3,9,27,81\}\,,\ \text{numero di divisori: } 4\,,\ 81 \neq 4^2\\
&N = 100\,, \quad \text{divisori}: \{1,2,4,5,10,20,25,50,100\}\,,\ \text{numero di divisori: } 9\,,\ 100 \neq 9^2\,.
\end{aligned}$$

Solo i due valori $N = 1$ e $N = 9$ hanno la proprietà richiesta.

14. La risposta è **(B)**. Per risolvere l'esercizio per via algebrica occorre considerare vari casi.
I caso: $x > 3$. L'equazione diventa: $x - 6 = 1/(x-3)$ da cui $x^2 - 9x + 17 = 0$. Utilizzando la formula risolutiva per equazioni di secondo grado si trova $x = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-68}}{2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{13}}{2}$; di queste due soluzioni $\dfrac{9+\sqrt{13}}{2} > \dfrac{9}{2} > 3$ è accettabile mentre $\dfrac{9-\sqrt{13}}{2} < \dfrac{9-\sqrt{9}}{2} = 3$ non lo è; dunque questo primo caso ci dà una soluzione dell'equazione.
II caso: $2 \leq x < 3$. L'equazione diventa: $(x-6)(x-3)+1 = x^2 - 9x + 19 = 0$; in questo caso le soluzioni sono: $x_1 = \dfrac{9+\sqrt{5}}{2} > \dfrac{9}{2} > 3$, non accettabile, e $x_2 = \dfrac{9-\sqrt{5}}{2} > \dfrac{9-3}{2} = 3$ (poichè $\sqrt{5} < 3$) non accettabile. Il secondo caso non porta a nessuna soluzione.
III caso: $x < 2$. L'equazione diventa $x^2 - x - 7 = 0$ che ha soluzioni $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{29}}{2} > \dfrac{\sqrt{25}}{2} > 2$, non accettabile; $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{28}}{2} < 0 < 2$, accettabile. Il terzo caso porta ad una soluzione e complessivamente l'equazione ha due soluzioni.
Indicazione di una seconda soluzione. L'esercizio può anche essere risolto per via grafica. Il numero di soluzioni coincide infatti con il numero di punti in cui i grafici delle due funzioni $f(x) = |x-2| - 4$ e $g(x) = \dfrac{1}{|x-3|}$ si intersecano. I grafici delle due funzioni sono riportati nella figura seguente.



15. La risposta è **(C)**. Facendo riferimento alla figura, il triangolo ABC è equilatero, poichè gli angoli in A e in B sono di $60°$. Inoltre $\widehat{ADB} = 180° - (\widehat{DAB} + \widehat{DBA}) = 180° - 80° - 50° = 50° = \widehat{DBA}$. Dunque il triangolo ABD è isoscele e quindi $\overline{DA} = \overline{AB} = \overline{AC}$ cioè anche il triangolo ACD è isoscele. Allora $\alpha = \widehat{ACD} = \frac{1}{2}(180° - \widehat{CAD}) = \frac{1}{2}(180° - 20°) = 80°$.

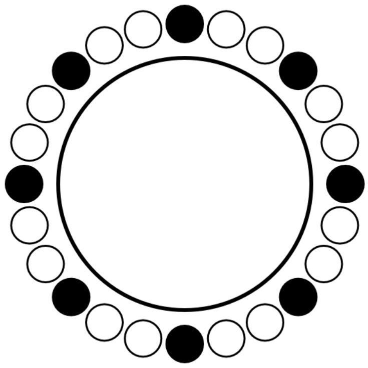


16. La risposta è **(D)**. Osserviamo che

- tra 1 e 9 la cifra 1 compare una volta;
- tra 10 e 99 la cifra 1 compare 19 volte: 10 volte come cifra delle decine (tra 10 e 19) e 9 volte come cifra delle unità;
- tra 100 e 999 la cifra 1 compare 280 volte: 100 volte come cifra delle centinaia (tra 100 e 199), 90 volte come cifra delle decine (nei numeri $a1b$, con a che varia tra 1 e 9 e b che varia tra 0 e 9), 90 volte come cifra delle unità (nei numeri $ab1$, con a che varia tra 1 e 9 e b che varia tra 0 e 9).

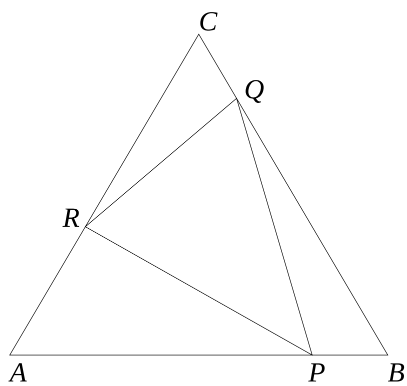
Complessivamente tra 1 e 999 la cifra 1 compare $1 + 19 + 280 = 300$ volte. Questo calcolo può essere utilizzato per contare quante volte compare la cifra 1 tra 1000 e 1999: 1000 volte come prima cifra e 300 volte complessivamente come seconda, terza o quarta cifra. Infine, tra 2000 e 2005 la cifra 1 compare una sola volta. Il numero complessivo di volte in cui la cifra 1 compare è allora $1000 + 300 + 300 + 1 = 1601$.

17. La risposta è **(A)**. Supponiamo che i ragazzi e le ragazze si siedano come indicato nella figura, in cui ogni pallino nero rappresenta un ragazzo e ogni pallino bianco una ragazza. Come si vede, vi sono 8 ragazzi e 16 ragazze, inoltre accanto ad ogni ragazza siede un ragazzo. Questo prova che esiste una disposizione compatibile con le affermazioni di tutte le ragazze che, quindi, potrebbero avere detto tutte la verità. Se ne conclude che non è possibile affermare con certezza che neppure una di loro abbia mentito.



18. La risposta è **(E)**. Osserviamo che $p(x-1)-p(x+1) = a(x-1)^{2005}+(x-1)+b-a(x+1)^{2005}-(x+1)-b = a((x-1)^{2005}-(x+1)^{2005})+2$. Quindi $p(x-1)-p(x+1)$ è un polinomio e ha grado strettamente minore di 2005, infatti i due termini x^{2005} che compaiono negli sviluppi di $(x-1)^{2005}$ e $(x+1)^{2005}$ si cancellano tra loro e tutti gli atri termini hanno grado strettamente minore di 2005. D'altra parte, se $a \neq 0$, il polinomio $p(x)$ ha grado 2005. Affinché valga l'identità $p(x-1)-p(x+1) = p(x)$ i due polinomi $p(x-1)-p(x+1)$ e $p(x)$ devono coincidere e in particolare devono avere lo stesso grado e quindi a deve essere uguale a zero. L'identità richiesta diventa allora $2 = x+b$ per ogni x; abbiamo ancora due polinomi che devono coincidere ma il primo, il polinomio costante 2, ha grado zero, mentre $x+b$ ha grado 1 (qualunque sia la scelta di b). In conclusione l'identità richiesta non è verificata per nessuna scelta di a e b.

19. La risposta è **(A)**. Calcoliamo l'area dei triangoli ABC, PBQ, RQC e APR. Area$(ABC) = 5 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\mathrm{m}^2 = \frac{25\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{m}^2$. Area di PBQ: il lato PB è lungo 1 m, l'altezza relativa a PB è lunga $\overline{BQ}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ m (poichè l'angolo $\widehat{PBQ}$ è di 60°); dunque area$(PBQ) = \sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$.



Area di RQC: il lato QC è lungo 1 m, l'altezza relativa a QC è lunga $\overline{CR}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ m (poichè l'angolo $\widehat{QCR}$ è di 60°); dunque area$(RQC) = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{m}^2$. Area di APR: il lato RA è lungo 2 m, l'altezza relativa a RA è lunga $\overline{AP}\frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ m (poichè l'angolo $\widehat{RAP}$ è di 60°); dunque area$(RQC) = 2\sqrt{3}\,\mathrm{m}^2$. Per differenza, calcoliamo l'area di PQR

$$\begin{aligned} \text{area}(PQR) &= \text{area}(ABC) - \text{area}(PBQ) - \text{area}(RQC) - \text{area}(APR) \\ &= \left(\frac{25\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3} - \frac{3\sqrt{3}}{4} - 2\sqrt{3}\right)\,\mathrm{m}^2 = \frac{5\sqrt{3}}{2}\mathrm{m}^2\,. \end{aligned}$$

In conclusione

$$\frac{\text{area}(PQR)}{\text{area}(ABC)} = \frac{\frac{5\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{m}^2}{\frac{25\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{m}^2} = \frac{2}{5}\,.$$

20. La risposta è **(A)**. Calcoliamo: $a_3 = 2(2+1) = 6$, $a_4 = 3(6+2) = 24$, $a_5 = 4(24+6) = 120$, $a_5 = 5(120+24) = 720$. Ci sono due termini consecutivi, a_5 e a_6, divisibili per 10; allora anche la loro somma è divisibile per 10 e quindi $a_7 = 6(a_6 + a_5)$ è anch'esso divisibile per 10. Con lo stesso ragionamento si vede che, poichè a_6 e a_7 sono divisibili per 10, anche a_8 lo è. Andando avanti in questo modo, si vede che tutti i termini della successione da a_5 in poi sono divisibili per 10; in particolare lo è a_{2005} che ha come ultima cifra 0.
Indicazione di una seconda soluzione. Si può dimostrare, utilizzando il procedimento di induzione, che $a_n = n!$ per ogni numero naturale n. Di conseguenza, per $n \geq 5$, a_n contiene i fattori 2 e 5 e quindi è divisibile per 10.

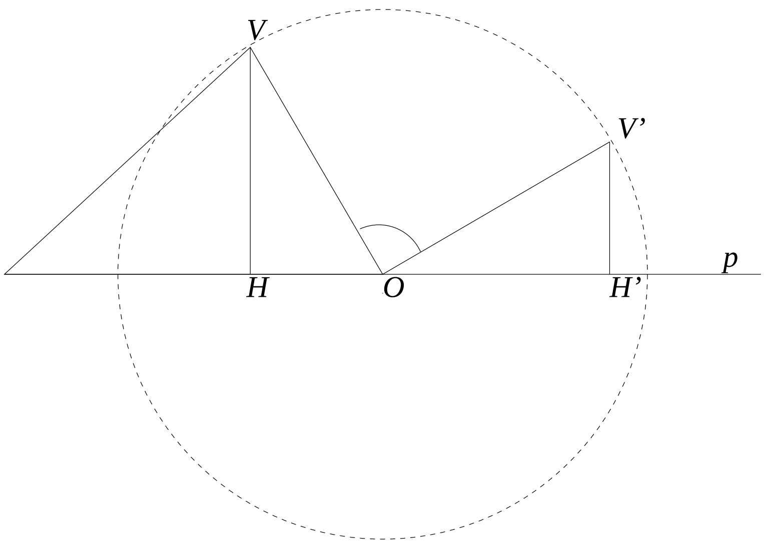
21. La risposta è **(B)**. Se Alice compra il palloncino rosso, anche Bianca e Cecilia lo comprano rosso e quindi tre bambine comprano il palloncino dello stesso colore; se Alice compra il palloncino blu, Daniela lo compra dello stesso colore di Bianca e anche Cecilia lo compra dello stesso colore di bianca: allora Bianca, Cecilia e Daniela comprano il palloncino dello stesso colore. In ogni caso, almeno tre bambine comprano il palloncino dello stesso colore.
L'affermazione della risposta **(A)** è falsa: se Alice compra il palloncino rosso, e lo può fare, anche Bianca lo compra rosso e anche Cecilia fa lo stesso; Daniela non ha nessun vincolo, perchè Alice ha comprato il palloncino rosso, quindi anche Daniela può comprare il palloncino rosso.
L'affermazione della risposta **(C)** è falsa: se Alice compra il palloncino rosso, Daniela può comprare il palloncino di colore diverso da quello di Bianca.
L'affermazione della risposta **(D)** è falsa: se Alice compra il palloncino blu, anche Bianca (che non ha più vincoli) lo può comprare blu, quindi anche Cecilia lo compra blu e infine anche Daniela lo compra come Cecilia, cioè blu; quindi è possibile che nessuna delle quattro bambine compri un palloncino rosso.

22. La risposta è **(C)**. Indichiamo con a e b le misure (in metri) dei cateti di un triangolo rettangolo di area $6\,\mathrm{m}^2$; allora $ab = 12$. La lunghezza in metri del perimetro di questo triangolo è: $2p = a+b+\sqrt{a^2+b^2}$. Aggiungendo e sottraendo il termine $2ab$ all'interno della radice quadrata, troviamo $2p = a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 2ab} = (a+b) + \sqrt{(a+b)^2 - 24} =$. Si vede allora che il perimetro del triangolo è minimo quando la somma $a+b$ è minima, con la condizione $ab = 12$. La disuguaglianza tra media geometrica e media aritmetica ci dice che $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ e le due quantità sono uguali se e solo se $a = b$; quindi, essendo il prodotto di a e b fissato, la loro somma è minima quando $a = b$, cioè quando $a = b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. In questo caso l'ipotenusa misura, in metri, $\sqrt{12+12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$.

23. La risposta è **(D)**. Dividiamo il conteggio delle parole possibili in vari casi.
I caso: parole in cui non compare la lettera B. Si tratta di tutte le parole di quattro lettere

che possono essere scritte con le lettere A, E, M, O: sono in tutto 4^4.
II caso: parole in cui la prima lettera è B. In queste parole non vi può essere alcuna M; sono allora tutte le parole di quattro lettere in cui la prima lettera è fissata e le altre tre possono essere A, B, E, O: sono in tutto 4^3 parole.
III caso: parole in cui la prima lettera è diversa da B e la seconda lettera è B. In queste parole, M può essere la prima lettera ma non la terza o la quarta; allora la prima lettera può essere A, E, M, O, la seconda è fissata, la terza e la quarta possono essere A, B, E, O: sono in tutto 4^3 parole.
IV caso: parole in cui la prima e la seconda lettera sono diverse da B e la terza lettera è B. In queste parole M può essere la prima o la seconda lettera ma non la quarta; allora le prime due lettere possono essere A, E, M, O, la terza lettera è fissata e la quarta può essere A, B, E, O: sono in tutto 4^3 parole.
V caso: parole in cui la prima, la seconda e la terza lettera sono diverse da B e la quarta lettera è B. In queste parole le prime tre lettere possono essere A, E, M, O, la quarta lettera è fissata: sono in tutto 4^3 parole.
I gruppi di parole descritti nei vari casi non hanno parole in comune, inoltre ciascuna parola tra quelle che devono essere contate ricade in uno di questi gruppi. Per avere il numero totale delle parole possiamo allora sommare i numeri di parole trovate nei vari casi: $4^4 + 4 \cdot 4^3 = 2 \cdot 4^4 = 2^9$.

24. La risposta è **(C)**. Consideriamo il piano contenente V e perperdicolare all'asse della rotazione e chiamiamo O il punto di intersezione tra questo piano e l'asse di rotazione. Nella figura V' indica la posizione del vertice al termine della rotazione, inoltre H e H' sono le proiezioni ortogonali di V e V' rispettivamente, sul piano p. Poichè la rotazione è di 90°, l'angolo VOV' è retto; di conseguenza i due triangoli rettangoli VHO e $V'H'O$ sono congruenti, quindi la distanza cercata $\overline{V'H'}$ è uguale a $\overline{HO}$.



Osserviamo ora che poichè il tetraedro è regolare, la faccia contenuta in p è un triangolo equilatero di lato $6\sqrt{3}$, e H è il baricentro di questo triangolo. È noto che in un triangolo equilatero il baricentro divide ciascuna altezza in due parti di cui una ha lunghezza doppia dell'altra. La distanza tra H e O è allora uguale a un terzo dell'altezza del triangolo:

$$\overline{HO} = \left(\frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ cm} = 3 \text{ cm}.$$

25. La risposta è **(D)**. Sostituendo ogni fattore del denominatore della frazione che definisce x con il numero naturale a lui successivo, eccettuato l'ultimo, 2006, che lasciamo invariato, troviamo

$$x = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2004 \cdot 2006}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2003 \cdot 2005} = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2002}{2001} \cdot \frac{2004}{2003} \cdot \frac{2006}{2005} < \frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdots \frac{2003}{2001} \cdot \frac{2005}{2003} \cdot \frac{2006}{2005} = 2006\,,$$

perchè i numeratori e i denominatori di tutti i restanti fattori si semplificano tra loro. Osserviamo poi che se $n \geq 1$ è un numero naturale, allora è vera la disuguaglianza

$$\frac{2n}{2n-1} = 1 + \frac{1}{2n-1} > 1 + \frac{1}{2n} = \frac{2n+1}{2n}\,.$$

Allora,

$$\frac{2}{1} > \frac{3}{2}\,, \ \frac{4}{3} > \frac{5}{4}\,, \ \frac{6}{5} > \frac{7}{6}\,, \ \ldots\,, \ \frac{2002}{2001} > \frac{2003}{2002}\,, \ \frac{2004}{2003} > \frac{2005}{2004}\,.$$

Quindi, sostituendo nell'espressione di x

$$x = \frac{2}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdots \frac{2002}{2001} \cdot \frac{2004}{2003} \cdot \frac{2006}{2005}$$

a ciascuna frazione $\dfrac{2n}{2n-1}$ (eccettuata l'ultima che lasciamo invariata) la frazione più piccola $\dfrac{2n+1}{2n}$, troviamo

$$x > \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2003}{2002} \cdot \frac{2005}{2004} \cdot \frac{2006}{2005}$$

(l'ultima frazione è rimasta invariata). D'altra parte $\dfrac{2006}{2005} > \dfrac{2006}{2006}$ e quindi

$$x > \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots \frac{2003}{2002} \cdot \frac{2005}{2004} \cdot \frac{2006}{2006} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2003 \cdot 2005}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2004 \cdot 2006} \cdot 2006 = \frac{2006}{x}\,.$$

Di conseguenza $x^2 > 2006$ cioè $x > \sqrt{2006}$.