I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

19 novembre 2003

D	D	C	C	C	C	A	E	D	B	A	E	E	B	D	A	D	C	B	D	C	C	B	C	B
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(D)**. Infatti $\frac{3^{5/2}}{3^{2/3}} = 3^{5/2}3^{-2/3} = 3^{5/2-2/3} = 3^{11/6}$.

2) La risposta è **(D)**. Siccome la somma dei numeri naturali da 1 a n vale $\dfrac{n(n+1)}{2}$, la loro media vale $\dfrac{n+1}{2}$, per cui n è ammissibile se e solo se $\dfrac{n+1}{2} < 2003$, cioè se e solo se $n < 4005$. Il massimo di tali n è dunque 4004.
Seconda soluzione.
Immaginiamo di scrivere i numeri naturali da 1 a n in ordine crescente e indichiamo con $M(n)$ la loro media aritmetica. Allora $M(n)$ vale il numero centrale dell'elenco se n è dispari e la media dei due numeri centrali dell'elenco se n è pari. Allora il numero richiesto deve essere vicino al doppio di 2002 e qualche semplice tentativo porta a concludere che: $M(4004) = \dfrac{2002+2003}{2} < 2003$ e $M(4005) = 2003$. Se poi $n > 4005$ è chiaro che $M(n) > 2003$. Dunque la risposta esatta è 4004.

3) La risposta è **(C)**. Sia $\beta = \dfrac{b}{a}$ e $\gamma = \dfrac{c}{a}$. Per il fatto che b e c sono multipli di a, β e γ sono interi. Scriviamo la disuguaglianza triangolare relativa al lato a:

$$a > |c-b| = |a\gamma - a\beta| = a \cdot |\gamma - \beta|$$

e quindi, semplificando a, otteniamo

$$1 > |\gamma - \beta|$$

e poiché γ e β sono interi non può essere che $|\gamma - \beta| = 0$, da cui segue $b = c$. Quindi il triangolo dev'essere isoscele: la risposta **(C)** è quindi corretta. Un controesempio alle risposte **(A)**, **(B)** ed **(E)** è fornito dal triangolo equilatero di lato 1. Usando il teorema di Pitagora, si può inoltre dimostrare che anche la risposta **(D)** non è corretta.

4) La risposta è **(C)**. Tullio spera che le tre palline da lui estratte siano di tre colori diversi. La prima pallina che Tullio osserva, fra le tre estratte, può essere di qualsiasi colore. La probabilità che la seconda sia di colore diverso dalla prima è $\dfrac{6}{8}$; la probabilità che la terza sia di colore diverso dalle prima due è $\dfrac{3}{7}$. La probabilità che le tre palline siano di colori diversi è pertanto $\dfrac{6}{8} \cdot \dfrac{3}{7} = \dfrac{9}{28}$.
Seconda soluzione.
La probabilità desiderata è il rapporto fra il numero di insiemi "vincenti" e il numero dei sottoinsiemi con 3 elementi di un insieme che ne ha 9; quindi

$$\frac{3\cdot 3\cdot 3}{\binom{9}{3}} = \frac{27\cdot 3!}{9\cdot 8\cdot 7} = \frac{9}{28}\ .$$

5) La risposta è **(C)**. Detta s la lunghezza del percorso (sola andata), i tempi di percorrenza per l'andata e il ritorno sono $t_1 = \frac{s}{v}$ (andata), $t_2 = \frac{s}{3v}$ (ritorno). La velocità media nell'intero viaggio sarà quindi:

$$\frac{2s}{t_1 + t_2} = \frac{2s}{\frac{s}{v} + \frac{s}{3v}} = 2s\frac{3v}{4s} = \frac{3}{2}v \ .$$

6) La risposta è **(C)**. Le prime tre affermazioni si contraddicono vicendevolmente, quindi al piú una di esse può essere vera, quindi ci sono almeno due affermazioni false, tra cui certamente la prima. Inoltre una delle due ultime affermazioni deve essere vera, e quindi la quarta è certamente vera. D'altra parte la quarta affermazione è compatibile con ciascuna delle precedenti, che esauriscono le possibilità residue: quindi anche una di esse è vera.

7) La risposta è **(A)**. La a) equivale a $x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2 \geq 0$, la b) equivale a $x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1 \geq 0$, la c) è $(x^2 - x)^2 \geq 0$.
Seconda soluzione.
Tutte e tre le diseguaglianze date sono soddisfatte per ogni valore positivo di x. Infatti
$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ e un quadrato non può essere negativo.
$x^2 - 2x + 2 = (x - 1)^2 + 1$ è una somma di quadrati e quindi è sempre positiva.
$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2(x - 1)^2$ è il prodotto di due quadrati e quindi non può essere negativo.

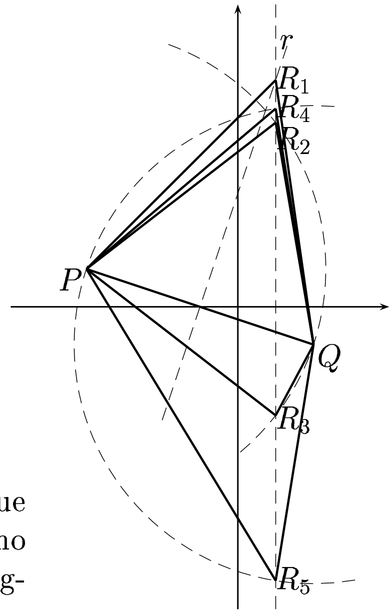
8) La risposta è **(E)**. Il totale dei punti di Michael, Juan Pablo e Kimi è 125. Poiché in ogni gara ci sono 25 punti a disposizione, essi hanno preso tutti i punti disponibili, e dunque si sono piazzati sempre primo, secondo e terzo. Rispetto al massimo possibile di 50 punti, Michael ne ha persi 7. Potendone perdere 2 (piazzandosi secondo) oppure 3 (piazzandosi terzo), l'unica possibilità è che si sia piazzato due volte secondo e una volta terzo. Juan Pablo, che ha perso 8 punti rispetto al massimo possibile, potrebbe essersi piazzato 2 volte terzo e una volta secondo oppure 4 volte secondo. Ma quest'ultima possibilità è esclusa, poiché, avendo Michael collezionato due secondi posti, nessun altro può essersi classificato secondo più di 3 volte. Per esclusione, Kimi deve essersi piazzato 2 volte secondo e 2 volte terzo.
Seconda Soluzione.
Una soluzione semplice si può trovare considerando il resto nella divisione per 3 dei punteggi dei tre concorrenti: i punteggi attribuiti primo e del terzo classificato hanno resto 1, quello del secondo ha resto 2. Pertanto, si vede rapidamente che:

piazzamenti	**resto nella divisione per 3 del punteggio**
ogni volta primo o terzo	$1+1+1+1+1 = 5$, resto 2
una volta secondo	$2+1+1+1+1 = 6$, resto 0
due volte secondo	$2+2+1+1+1 = 7$, resto 1
tre volte secondo	$2+2+2+1+1 = 8$, resto 2
quattro volte secondo	$2+2+2+2+1 = 9$, resto 0
cinque volte secondo	$2+2+2+2+2 = 10$, resto 1

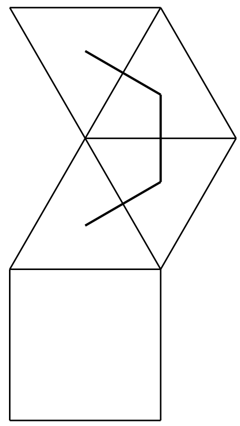
Del resto, il punteggio di Michael ha resto 1, quello di Juan Pablo 0 e quello di Kimi 1. Quindi Michael e Kimi devono essersi qualificati secondi per due volte ciascuno e Juan Pablo una volta sola. La risposta esatta allora è **(E)**. Si verifica in effetti che i piazzamenti possono essere stati questi:

Gara	1	2	3	4	5
Michael	10	10	8	8	7
Juan Pablo	7	7	10	10	8
Kimi	8	8	7	7	10

9) La risposta è **(D)**. Siano $P = (-4, 1)$, $Q = (2, -1)$, r la retta $x = 1$. Intersecando r con l'asse di PQ si ottiene un punto R_1 tale che il triangolo PQR_1 è isoscele sulla base PQ.
La circonferenza con centro P e raggio PQ taglia la retta r in due punti R_2 e R_3 tali che ciascuno dei triangoli PQR_2, PQR_3 è isoscele, avendo i lati che si congiungono in P uguali fra loro. La circonferenza con centro Q e raggio PQ taglia la retta r in due punti R_4 e R_5 tali che ciascuno dei triangoli PQR_4, PQR_5 è isoscele, avendo i lati che si congiungono in Q uguali fra loro. Ci sono quindi cinque triangoli isosceli del tipo voluto.



10) La risposta è **(B)**. Il percorso più breve che unisce due centri di due facce laterali contigue della piramide si trova considerando sul piano due triangoli equilateri aventi un lato in comune e unendo con un segmento i due relativi baricentri.
Tale segmento giace sulle altezze dei due triangoli relative al lato comune. Dal momento che il baricentro dista dalla base $\frac{1}{3}$ dell'altezza, il nostro segmento sarà lungo $\frac{2}{3}$ dell'altezza h di un triangolo equilatero di lato 2. Sapendo che $h = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, si ha che il segmento è lungo $\frac{2}{3}\sqrt{3}$.
Si osserva infine che il percorso del ragno è lungo quanto 3 di questi segmenti (sufficienti ad unire i quattro centri). Il ragno percorre quindi un tragitto lungo $2\sqrt{3}$.
Nota. Si è cercato il tragitto più breve tra quelli che passano da un centro ad un altro attiguo, è facile osservare che un qualsiasi altro ordine dei vertici da percorrere determina tragitti più lunghi di quello trovato.



11) La risposta è **(A)**. Il rospo dovrebbe fare 2 salti in avanti e 2 a destra; quindi per arrivare in 6 salti deve farne uno "sbagliato" (indietro o a sinistra) e uno in piú (avanti o a destra) per recuperare.
Supponiamo che il salto sbagliato sia indietro, e che quindi ce ne siano 3 avanti e 2 a destra. Se il salto indietro non è né il primo né l'ultimo, allora deve essere immediatamente preceduto e seguito dai salti a destra, altrimenti il rospo passerebbe due volte sulla stessa foglia; gli altri tre salti sono necessariamente in avanti. Dunque vi sono 4 possibili percorsi, secondoché il salto indietro è il secondo, il terzo, il quarto o il quinto. Se invece il salto indietro è il primo, allora il secondo è a destra necessariamente, mentre l'altro salto a destra può essere indifferentemente uno qualunque degli ultimi quattro. Quindi si hanno altri 4 percorsi. Analogamente si ottengono 4 percorsi in cui l'ultimo salto è indietro (e quindi il penultimo e uno dei primi quattro sono a destra). In totale abbiamo dunque 12 percorsi con un salto indietro.
Senza dover rifare il ragionamento sappiamo che vi saranno 12 percorsi con un salto a sinistra, ottenuti scambiando le verticali con le orizzontali, ossia considerando la simmetria rispetto alla diagonale AB (che scambia avanti con destra e indietro con sinistra). Quindi la risposta è 24.

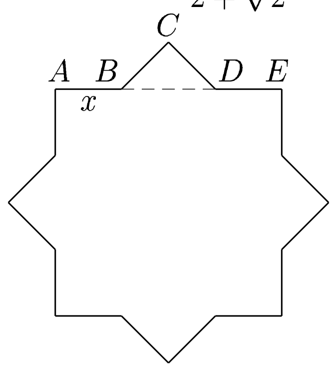
12) La risposta è **(E)**. Data una traiettoria r per l'asteroide, una qualsiasi traiettoria ad essa omotetica rispetto alla stazione fornisce le stesse rilevazioni, quindi non può essere determinata in modo univoco, a meno che l'asteroide non si scontri con la stazione, evento assolutamente da evitare!

13) La risposta è **(E)**. La (I) è falsa solo per $x = 0$, perché il denominatore si annulla e non si può semplificare. La (II) è ovviamente sempre vera. La (III) è vera solo per $x = 0$, come si vede risolvendo l'equazione di primo grado. Quindi solo la risposta **(E)** è accettabile.

14) La risposta è **(B)**. Poiché $8n + 50 = 4(2n + 1) + 46$, $8n + 50$ è un multiplo di $2n + 1$ se e solo se 46 è un multiplo di $2n + 1$. L'unico divisore di 46 della forma $2n + 1$ con n positivo è 23.

15) La risposta è **(D)**. Dato che il valore di un polinomio calcolato in 1 è precisamente la somma dei coefficienti, basta sostituire $x = 1$ nel membro sinistro dell'identità, ottenendo
$\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2^3 + 3^3 = 35.$

16) La risposta è **(A)**. I segmenti AB, BC, CD e ED hanno la stessa lunghezza che indichiamo con x. Il lato BD è l'ipotenusa del triangolo BCD rettangolo e isoscele, per cui la sua misura vale $x\sqrt{2}$. La lunghezza del lato AE, che sappiamo essere pari a 1, vale quanto la somma delle lunghezze di AB, BD e DE, cioè abbiamo: $1 = x + x\sqrt{2} + x$. Risolvendo si ha $x = \frac{1}{2+\sqrt{2}}$.
L'area del triangolo BDC vale:



$$\frac{1}{2}x \cdot x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \sqrt{2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

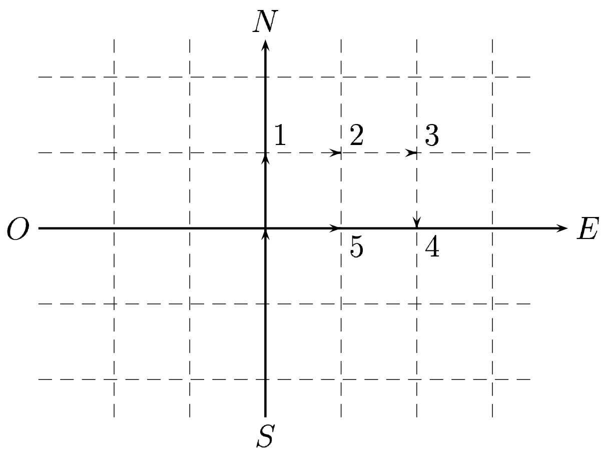
L'area della figura si ottiene sommando l'area di un quadrato di lato 1 con le aree di 4 triangoli di area pari a quella di BCD per cui l'area richiesta vale: $1 + 4\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = 4 - 2\sqrt{2}$.

17) La risposta è **(D)**. Ogni triangolo è identificato univocamente dai suoi tre vertici: quindi dobbiamo contare i diversi modi di scegliere tre vertici non allineati tra i nove punti presenti.
I modi di scegliere tre punti qualunque tra i nove presenti sono uguali alle combinazioni di tre elementi su nove, cioè

$$\binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$$

Però, ci sono 8 scelte che corrispondono a punti allineati (e quindi triangoli degeneri) nel diagramma: i punti allineati secondo una linea orizzontale o verticale o secondo una delle diagonali maggiori. I triangoli effettivamente costruibili sono perciò $84 - 8 = 76$.

18) La risposta è **(C)**. Detta "origine" la posizione iniziale di Giovanni, e "Nord" la direzione in cui è rivolto, si nota che dopo i primi 5 passi (vedi figura a fianco) Giovanni si trova nel punto (1, 0) e guarda a Est. Perciò ogni 5 passi Giovanni si trova spostato di un solo passo verso destra, ruotato di 90° verso destra. Dopo $4 \cdot 5 = 20$ passi, Giovanni si ritroverà nell'origine, rivolto a Nord, ossia nella stessa posizione iniziale. Dopo i primi 180 passi (multiplo di 20) Giovanni è ancora al punto di partenza, rivolto a Nord. Con altri 5 passi si trova nel punto (1, 0) e guarda a Est; con un ulteriore passo avanti (il 186−esimo) raggiungerà il punto (2, 0), a due metri dal punto di partenza.



19) La risposta è **(B)**. Sia n il numero delle cartoline di Anna e Marco. Abbiamo $n = 8a + 3$ ed $n = 5b + 1$ per opportuni interi a, b. Poiché $40 \leq n \leq 79$, dobbiamo avere $5 \leq a \leq 9$, cioè $n = 43, 51, 59, 67, 75$. L'unico di questi numeri della forma $5b + 1$ è 51.

20) La risposta è **(D)**. Si osservi anzitutto che se α è radice del polinomio dato, anche $\frac{1}{\alpha}$ lo è. Infatti α è diverso da 0, e dividendo per α^4 si ottiene precisamente $1 - \frac{2}{\alpha} - \frac{7}{\alpha^2} - \frac{2}{\alpha^3} + \frac{1}{\alpha^4} = 0$. (Si poteva evitare il calcolo osservando che il polinomio è palindromo). Quindi l'insieme dei reciproci delle radici coincide con l'insieme delle radici, e dunque la somma delle radici coincide con la somma dei loro reciproci. Ma la somma delle radici di un polinomio monico è l'opposto del secondo coefficiente.

Seconda soluzione.

Se a, b, c, d sono le radici del polinomio dato, si ha

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 - 2x + 1,$$

quindi $1 = abcd$ e $2 = abc + abd + acd + bcd$.

D'altra parte

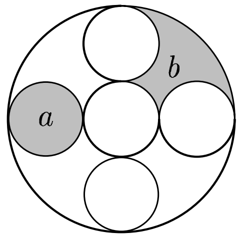
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{bcd + acd + abd + abc}{abcd}.$$

Quindi la somma dei reciproci delle radici è 2.

21) La risposta è **(C)**. Ciascuno dei cinque angoli della stella è un angolo alla circonferenza, e ognuno di essi è sotteso da un arco. L'unione di tali archi copre tutta la circonferenza, e la somma delle lunghezze di tali archi è proprio la lunghezza dell'intera circonferenza. È noto che gli angoli alla circonferenza sottesi da un'arco sono ampi la metà degli angoli al centro corrispondenti. La somma degli angoli aventi i vertici nelle punte è metà dell'angolo al centro sotteso da tutta la circonferenza, ovvero un angolo giro, da cui la somma è $\frac{360°}{2} = 180°$.

22) La risposta è **(C)**. La somma dei numeri interi da 1 a n è uguale a $\frac{n(n+1)}{2}$ e dunque la somma di tutti gli interi da 1 a 2003 è uguale a 2 007 006. Ne segue che un sottoinsieme di $\{1, 2, \ldots, 2003\}$ è tale che la somma dei suoi elementi è uguale a 2 007 000 se, e soltanto se, la somma degli elementi del suo complementare è uguale a 6. È pertanto equivalente contare questi ultimi. Essi sono evidentemente solamente $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 4\}$ $\{6\}$.

23) La risposta è **(B)**. I cerchi piccoli hanno infatti il diametro pari a $\frac{1}{3}$ di quello del cerchio grande, e dunque l'area di ognuno di essi è uguale a $\frac{1}{9}$ di quella del cerchio grande. L'area della porzione del cerchio grande "al di fuori" dei cerchi piccoli è dunque uguale a $\frac{4}{9}$ dell'area del cerchio grande. La porzione precedente è però divisa in quattro figure uguali (di cui una è la figura b), ognuna delle quali ha area uguale a $\frac{1}{9}$ dell'area del cerchio grande.



24) La risposta è **(C)**. Se n denota il numero di byte compromessi in un certo istante, dopo un minuto questi diventano $4n+1$, poi 4^2n+4+1, poi 4^3n+4^2+4+1, e così via, fino a che dopo 14 minuti sono

$$4^{14}n + 4^{13} + \cdots + 4 + 1 = n \cdot 2^{28} + 2^{26} + \cdots + 2^2 + 1$$

Il doppio di questo numero è $2n \cdot 2^{28} + 2^{27} + \cdots + 2^3 + 2$, quindi il triplo (sommando) è

$$3n \cdot 2^{28} + 2^{27} + 2^{26} + \cdots + 2 + 1 = 3n \cdot 2^{28} + 2^{28} - 1$$

Uguagliando l'ultimo valore con la memoria totale del PC meno un byte, $2.5 \cdot 2^{30} - 1 = 10 \cdot 2^{28} - 1$, si trova che $3n+1 = 10$ e quindi $n = 3$.

Per convincersi che $2^{27} + 2^{26} + \cdots + 2 + 1 = 2^{28} - 1$ si può usare il prodotto notevole $x^{28} - 1 = (x-1)(x^{27} + x^{26} + \cdots + x + 1)$ con $x = 2$, oppure sommare 1 a entrambi i membri, notando che

$$\begin{aligned} 1 + 1 + 2 + 2^2 + 2^3 \cdots + 2^{27} &= 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{27} \\ &= 2^2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{27} = \cdots = 2^{27} + 2^{27} = 2^{28} \end{aligned}$$

25) La risposta è **(B)**. Poiché il segmento CP è ortogonale sia al lato VA che al segmento BP, esso è ortogonale al piano contenente la faccia VAB della piramide. Ma allora considerando VAB come base della piramide è facile calcolarne il volume: in VAB il segmento BP è l'altezza relativa al lato VA e quindi l'area di VAB in cm^2 è pari a

$$\frac{VA \cdot BP}{2} = \frac{(1+2)3}{2} = \frac{9}{2};$$

allora, visto che CP è l'altezza della piramide relativa a VAB, il suo volume vale in cm^3

$$\frac{(\text{area } VAB) \cdot CP}{3} = \frac{9 \cdot 4}{3} = 6.$$

Seconda soluzione.
La retta AV, essendo perpendicolare a CP e BP, è perpendicolare al piano BCP. La piramide $ABCV$ viene così scomposta da BCP in due piramidi aventi BCP come base, e PV, PA come rispettive altezze. Il volume di $ABCV$ è la somma dei volumi di queste due piramidi, e cioè

$$\frac{1}{3}(\text{area } BCP) \cdot (AP + VP) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot (1+2) = 6\ .$$