I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

20 novembre 2002

D	C	C	B	C	C	B	E	C	D	D	C	E	A	D	B	D	E	C	B	B	B	E	B	E
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1) La risposta è **(D)**. Poiché $12 \times AB$ è pari, la cifra A deve essere pari, inoltre deve essere $B = 2A$. Dunque, oltre al caso ovvio $A = 2$ che fornisce $12 \times 21 = 21 \times 12$ si hanno solo i casi $A = 4$, $A = 6$, $A = 8$ che forniscono $12 \times 42 = 21 \times 24$, $12 \times 63 = 21 \times 36$, $12 \times 84 = 21 \times 48$.

2) La risposta è **(C)**. Indicando con p la percentuale di ricarico e con P il prezzo originario si ha infatti $P\left(1 - \dfrac{20}{100}\right)\left(1 + \dfrac{p}{100}\right) = P$, da cui $p = 25\%$.

3) La risposta è **(C)**. Indicando con l il lato del quadrato e con r il raggio dei quarti di circonferenza piccoli, il raggio di quelle grandi sarà $l - r$. Il perimetro della figura in grigio sarà quindi

$$2 \times \frac{2\pi r}{4} + 2 \times \frac{2\pi(l-r))}{4} = \pi r + \pi l - \pi r = \pi l \ .$$

Il perimetro del quadrato è $4l$ e il rapporto fra i perimetri è quindi $\dfrac{\pi}{4}$.

4) La risposta è **(B)**. Il rapporto fra i diametri è inversamente proporzionale alla velocità di rotazione delle ruote. Indicando con d il diametro della seconda puleggia si avrà quindi che

$$100 \frac{\text{giri}}{\text{minuto}} \times 5 \text{ cm} = 200 \frac{\text{giri}}{\text{minuto}} \times d \ ,$$

da cui $d = 25$ cm.

5) La risposta è **(C)**. Indicando con l la lunghezza del lato del cubo, la superficie totale sarà $6l^2$. La regione ombreggiata è formata da 3 quarti di circonferenze, quindi la sua superficie sarà $3 \times \dfrac{\pi l^2}{4}$. Il rapporto sarè quindi $\dfrac{3 \times \frac{\pi l^2}{4}}{6l^2} = \dfrac{3\pi}{24} = \dfrac{\pi}{8}$.

6) La risposta è **(C)**. Se $I(x), CR(x), AL(x)$ sono i predicati "x è un insegnante", "x ha un coniuge ricco" e "x ha un'auto di lusso", l'asserzione del testo diviene

$$\forall x (I(x) \Longrightarrow (AL(x) \Longrightarrow CR(x))),$$

che è ovviamente equivalente a

$$\forall x (I(x) \& AL(x) \Longrightarrow CR(x)),$$

che formalizza l'asserzione **(C)**.
D'altra parte è evidente che l'asserzione del testo non impone a nessuno di possedere auto di lusso (come fanno **(B)** ed **(E)**), né impone ai possessori di auto di lusso di essere insegnanti (come fa **(D)**), e neppure di avere un coniuge ricco se non sono insegnanti (come fa **(A)**).

7) La risposta è **(B)**. Il numero di giorni dopo i quali si ritroveranno a correre insieme è dato dal minimo comune multiplo fra 10, 15 e 14, che è 210. Le tre amiche si ritroveranno a correre insieme dopo 210 giorni.

8) La risposta è **(E)**. Infatti $1000^{0,1} = \sqrt[10]{1000}$ che non è razionale. Si verifica inoltre che -2002 è addirittura intero, $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$ che è intero, $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$ che è razionale e $100^{0,5} = \sqrt{100} = 10$.

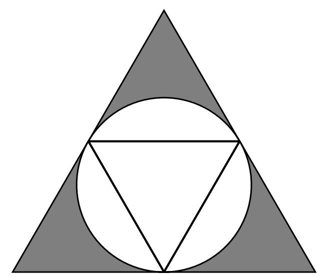
9) La risposta è **(C)**. Detto V il volume incognito espresso in cm^3, il peso del primo oggetto è $8{,}9V$, quello del secondo è $7{,}8V$. Si ha quindi $8{,}9V - 7{,}8V = 242$, da cui $V = 220\ \mathrm{cm}^3$.

10) La risposta è **(D)**. 301 è il solo fra i numeri indicati che è divisibile per 7 e che dà resto 1 nelle divisioni per 3, 4, 5, 6.

11) La risposta è **(D)**. Infatti $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$. Occorre quindi che $\frac{ad+bc}{bd} = \frac{a+c}{b+d}$, cioè $(a+c)bd = (b+d)(ad+bc)$, da cui $ad^2 + cb^2 = 0$, che non è mai verificata se a, b, c, d sono interi positivi.

12) La risposta è **(C)**. Infatti se il punteggio di uno dei due dadi è n, i casi favorevoli sono $n-1$; In totale i casi favorevoli sono dunque $5+4+3+2+1+0 = 15$, mentre quelli possibili sono $6^2 = 36$. La probabilità è quindi $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

13) La risposta è **(E)**. Applicando alla figura mostrata nel testo due rotazioni, la prima di 120° e la seconda di 240° rispetto al centro della circonferenza cui appartiene l'arco, si ottiene la figura mostrata a fianco. Da essa è evidente che l'area richiesta S è $\frac{1}{3}$ dell'area che si ottiene sottraendo dall'area di un triangolo equilatero di lato 6 l'area del cerchio in esso inscritto, che ha raggio pari ad $\frac{1}{3}$ dell'altezza del triangolo. Si ha quindi:



$$S = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 6\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2} - \pi\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{3}\left(9\sqrt{3} - 3\pi\right) = 3\sqrt{3} - \pi\ .$$

14) La risposta è **(A)**. Detta $p\%$ la probabilità che in un parto gemellare nascano due femmine, si ha che su 100 parti gemellari nascono $33 + 2p$ femmine, quindi con una percentuale di femmine pari a $(33+2p)/200 = (16,5+p)\%$. Poiché questa deve essere $48,5\%$, si ottiene $p = 32$.

15) La risposta è **(D)**. Detta L la lunghezza del percorso, v_1 la velocità nel primo tratto, v_2 la velocità nel secondo tratto, i tempi impiegati per percorrere la prima e la seconda metà sono $t_1 = \frac{L}{2v_1}$ e $t_2 = \frac{L}{2v_2}$. La velocità media è $v_m = \frac{L}{t_1+t_2} = \frac{L}{\frac{L}{2v_1}+\frac{L}{2v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$. Con i numeri indicati nel testo, si ha $30 = \frac{2}{\frac{1}{15}+\frac{1}{v_2}}$ da cui $30 = \frac{30v_2}{15+v_2}$ ed infine $15 + v_2 = v_2$ che non ha soluzioni.

16) La risposta è **(B)**. La (i) è falsa, ad esempio 25 e 27 sono due numeri dispari consecutivi entrambi non primi. La (ii) è falsa, ad esempio 23, 25 e 27 sono tre numeri dispari consecutivi di cui due non sono primi. La (iii) è vera perchè dati quattro numeri dispari consecutivi (in realtà ne basterebbero tre), almeno uno è divisibile per 3 e quindi non è primo (il caso 1, 3, 5, 7 ha 1 che non è primo). La (iv) è falsa, ad esempio 11, 13, 15, 17, 19 sono 5 dispari consecutivi di cui solo uno non è primo.

17) La risposta è **(D)**. Il numero delle zone è infatti $1 + 6 + 12 + 8 = 27$. 1 è il cubo stesso, 6 sono le regioni che "confinano" con una delle 6 facce del cubo, 12 confinano ciascuna con uno degli spigoli e 8 con i vertici.

18) La risposta è **(E)**. Indicando con q la ragione della progressione si osserva che nella **(A)** e nella **(D)** i numeri possono appartenere a una progressione con $q = 2$ e primo termine 3 ($3 \cdot 2 = 6$, $3 \cdot 2^4 = 48$, $3 \cdot 2^5 = 96$). I numeri della **(B)** possono appartenere a una progressione con $q = \frac{1}{3}$ e primo termine 3 ($3 \cdot \frac{1}{3} = 1$, $3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{81}$). I numeri della **(C)** possono appartenere a una progressione con $q = 1{,}1$ e primo termine 3 ($3 \cdot 1{,}1 = 3{,}3$, $3 \cdot (1{,}1)^3 = 3{,}993$). D'altronde i tre termini in **(E)** non possono appartenere a una stessa progressione geometrica, altrimenti si avrebbe $\left(\frac{3}{5}\right)^k = \left(\frac{5}{9}\right)^h$, con h e k interi, che non ha soluzioni.

19) La risposta è **(C)**. Il primo e il quarto non possono essere richiusi, il secondo, il terzo e il quinto sì.

20) La risposta è **(B)**. Un numero che termina per 5 può essere scritto nella forma $10 \cdot a + 5$ e il suo quadrato è $100a(a + 1) + 25$. Nell'esecizio dato, $a = 99\,999\,999\,999\,999\,999$ e $a + 1 = 10^{17}$. Il quadrato richiesto è quindi formato da 17 volte la cifra 9, seguiti da 17 zeri da 2 e 5. La somma delle cifre sarà quindi $17 \cdot 9 + 2 + 5 = 160$.

21) La risposta è **(B)**. La successione di salti del canguro è $3 - 1 + 5 - 3 + 7 - 5 + \ldots = (3 - 1) + (5 - 3) + (7 - 5) + \ldots = 3 + (-1 + 5) + (-3 + 7) + (-5 + 9) + \ldots$. Quindi salterà su tutti i gradini pari (precisamente dopo il salto $2k$ si trova sul gradino $2k$), mentre tocca tutti e soli i gradini dispari della forma $4k + 3$. (precisamente dopo il salto $1 + 2k$ si trova sul gradino $3 + 4k$). Dunque riuscirà a salire fino in cima solo se il gradino pericolante è della forma $4k + 1$.

22) La risposta è **(B)**. Detti n_1, n_2, n_3 i ragazzi che frequentano la prima, la seconda e il trennio, si hanno le seguenti relazioni: $\begin{cases} n_2 = \frac{13}{46}(n_1 + n_3) \\ n_1 + 10 = \frac{2}{5}(n_1 + n_2 + n_3 + 10) \\ n_3 = 230 \end{cases}$ da cui $\begin{cases} -13n_1 + 46n_2 = 2990 \\ 3n_1 - 2n_2 = 430 \end{cases}$ ed infine $n_1 = 230$, $n_2 = 130$ e il totale degli alunni è qundi 590.

23) La risposta è **(E)**. (i) è certamente un furfante (un cavaliere non potrebbe mentire dicendo che sono tutti furfanti), e le asserzioni di (ii) e (iii) sono contradditorie, quindi almeno uno dei due è un furfante. Ora però potrebbe darsi che (ii) fosse l'unico cavaliere (in tal caso (iv) mentirebbe da furfante qual è), oppure potrebbe darsi che (iii) fosse un cavaliere (in tal caso (iv) direbbe il vero, essendo un cavaliere).

24) La risposta è **(B)**. L'area di base vale $\frac{\sqrt{3}}{4}$ e dunque tutti i tetraedri con altezza $q\sqrt{3}$, ove q è un numero razionale, hanno un volume che si esprime come un numero razionale.

25) La risposta è **(E)**. In effetti non si possono pagare 58 o 61 cent, mentre se ne possono pagare $87 = 8 \cdot 4 + 11 \cdot 5$. D'altra parte si possono pagare tutti i multipli di 8, tutti i numeri della forma $8k + 1$ che siano maggiori o uguali a 33, tutti i numeri della forma $8k + 2$ che siano maggiori o uguali a 66, tutti i numeri della forma $8k + 3$ che siano maggiori o uguali a 11, tutti i numeri della forma $8k + 4$ che siano maggiori o uguali a 44, tutti i numeri della forma $8k + 5$ che siano maggiori o uguali a 77, tutti i numeri della forma $8k + 6$ che siano maggiori o uguali a 22 e tutti i numeri della forma $8k + 7$ che siano maggiori o uguali a 55.
Quindi il massimo numero escluso è $69 = 77 - 8$.