PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Soluzioni Triennio

22 novembre 2006

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	A
2	C
3	C
4	B
5	A
6	B
7	E
8	E
9	B
10	A
11	B
12	C
13	E

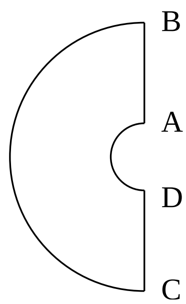
Problema	Risposta corretta
14	B
15	B
16	B
17	C
18	B
19	D
20	B
21	D
22	C
23	C
24	B
25	A

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(A)**.
   Il numero della pagina a cui è arrivata Laura, essendo divisibile per 3, per 4 e per 5 deve necessariamente essere divisibile anche per il loro minimo comune multiplo, ovvero per 60. Tutti i multipli di 60 terminano per zero quindi la pagina successiva avrà 1 come cifra delle unità.

2. La risposta è **(C)**.

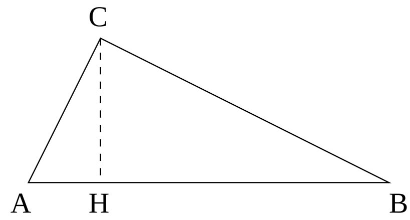
   Possiamo suddividere il perimetro del disegno in quattro parti: due segmenti (AB e CD) e due semicirconferenze (gli archi BC e DA di raggio rispettivamente 4 cm e 1 cm). La lunghezza dei segmenti è pari alla differenza tra i raggi delle due circonferenze: $\overline{AB} = \overline{CD} = 3\,\text{cm}$.
   La lunghezza delle semicirconferenze è la metà della lunghezza della circonferenza corrispondente: $\overline{BC} = \dfrac{2\pi \cdot 4}{2} = 4\pi$ cm; $\overline{DA} = \dfrac{2\pi \cdot 1}{2} = \pi$ cm. In definitiva, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = (6 + 5\pi)$ cm.

3. La risposta è **(C)**.
   Una equazione di secondo grado ammette una sola soluzione soltanto nel caso in cui il discriminante sia uguale a zero.
   Nel nostro caso si deve annullare $\Delta = 4a^2 - 4$. Abbiamo quindi che $a^2 - 1 = 0$ da cui $a = 1$ oppure $a = -1$. Ci sono quindi due valori di a per cui l'equazione ammette una sola soluzione.

4. La risposta è **(B)**.
Il più grande multiplo di tre inferiore a 2000 è 1998. I multipli di tre successivi possono essere scritti come $a_k = 1998 + 3\,k$ con k intero positivo. Ad esempio per $k = 1$ otteniamo $a_1 = 2001$, il più piccolo tra i numeri cercati. Si tratta di stabilire qual è il più grande valore di k per cui $a_k < 4000$, cioè per cui $1998 + 3k < 4000$.
La disuguaglianza è soddisfatta per $k < \dfrac{4000 - 1998}{3}$, cioè per $k < \dfrac{2002}{3} = 667 + \dfrac{1}{3}$ ma, dato che k è intero positivo, questo equivale a dire $k \leq 667$. Il numero dei multipli di 3 compresi tra 2000 e 4000 è quindi 667.

5. La risposta è **(A)**.
L'ipotenusa AB ha come lunghezza la somma delle lunghezze delle proiezioni dei cateti, ovvero 3 m +12 m = 15 m. La lunghezza dell'altezza CH può essere calcolata utilizzando il secondo teorema di Euclide: $\overline{CH}^2 = \overline{AH} \cdot \overline{HB} = 36$ m^2.
Di conseguenza $\overline{CH} = 6$ m e l'area risulta essere $\dfrac{\overline{AB} \cdot \overline{CH}}{2} =$ 45 m^2.

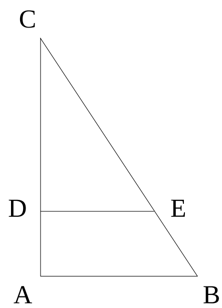


6. La risposta è **(B)**.
Il prezzo del televisore nei negozi Ipersfera è di $800 \cdot (1 - 0.15)$ euro = 680 euro. A questa cifra va applicato lo sconto del 10% praticato da Ipersfera ai clienti di nome Francesco, per cui il costo effettivo del televisore per Francesco è di $680 \cdot (1 - 0.1)$ euro = 612 euro.
Si osservi che le operazioni fatte *non* corrispondono a ridurre del 25% il prezzo del televisore praticato da Landscape perchè in questo caso la riduzione del 10% sarebbe calcolata su 800 euro e non sui 680 euro corrispondenti al prezzo non scontato di Ipersfera.

7. La risposta è **(E)**.

I triangoli ABC e DEC sono simili. Sappiamo che il rapporto tra le aree di due figure simili è uguale al quadrato del rapporto tra 2 lati corrispondenti. Di conseguenza,

$$\left(\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}}\right)^2 = \frac{\text{area}\,(DEC)}{\text{area}\,(ABC)} = \frac{3}{4}, \quad \text{cioè} \quad \overline{DC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{m}$$

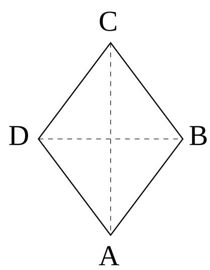


8. La risposta è **(E)**.
La scomposizione in fattori primi di $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ è: $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. Un suo divisore dovrà avere quindi una scomposizione in fattori primi del tipo $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ dove $a = 0, 1, 2, 3, 4$, $b = 0, 1, 2$, $c = 0, 1$. Ciascun divisore è individuato da una particolare scelta della terna (a, b, c). Contare i divisori equivale a contare quante terne distinte si possono formare. Ci sono 5 possibili scelte per il valore di a, tre per il valore di b e due per quello di c per cui complessivamente le terne (a, b, c) possibili sono $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

9. La risposta è **(B)**.

$\overline{DB} + \overline{AC} = \dfrac{3}{4}\overline{AC} + \overline{AC} = \dfrac{7}{4}\overline{AC} = 56$ m, cioè $\overline{AC} = 32$ m e$\overline{BD} = 24$ m.

Il lato del rombo è $\overline{AB} = \dfrac{1}{2} \cdot \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2}$ m $= 20$ m. Di conseguenza il perimetro del rombo è di 80 m.



10. La risposta è **(A)**.
Ricordiamo che se $a > b > 0$ e $n > 0$ allora $a^n > b^n$. Osserviamo che scegliendo $n = 6$, cioè pari al minimo comune multiplo degli indici delle radici (6, 2, 3 rispettivamente), il confronto fra le seste potenze dei numeri assegnati si riduce ad un confronto tra numeri interi.
Si ha quindi:

$$(2\sqrt[6]{2})^6 = 2^6 \cdot 2 = 128. \qquad (\sqrt{5})^6 = 5^3 = 125, \qquad (\sqrt[3]{11})^6 = 11^2 = 121.$$

Poiché $121 < 125 < 128$ abbiamo che $\sqrt[3]{11} < \sqrt{5} < 2\sqrt[6]{2}$.

11. La risposta è **(B)**.
Conviene immaginare che la deposizione dei gettoni avvenga in due fasi. Prima depositiamo su tutte le caselle un numero di gettoni pari al numero della riga cui appartengono, poi depositiamo su tutte un numero di gettoni pari al numero della colonna.
In entrambi i casi depositiamo 8 volte 1 moneta, 8 volte 2 monete, 8 volte 3 monete fino a 8 volte 8 monete per l'ultima riga o colonna. Quindi per ciascuna delle due fasi depositiamo $8 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8) = 8 \cdot 36 = 288$ gettoni. Il numero totale di gettoni depositati è quindi $2 \cdot 288 = 576$.

12. La risposta è **(C)**.
Al passare di ogni ora, il valore P del patrimonio di Paperone aumenta del 50%. Il suo valore è allora quello precedente aumentato della sua metà. In altre parole, ad ogni ora il valore del patrimonio aumenta da P a $P\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}P$. Al termine delle 4 ore che intercorrono tra le 12 e le 16 il patrimonio varrà quindi $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ volte il suo valore iniziale, cioè $64 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 324$ fantastiliardi.

13. La risposta è **(E)**.

Indichiamo con N il numero di studenti che non hanno partecipato a nessuna competizione, con F e C il numero di quelli che hanno partecipato soltanto alle gare di fisica e chimica rispettivamente, con E il numero di quelli che hanno partecipato ad entrambe.
Il testo del problema fornisce le informazioni seguenti:

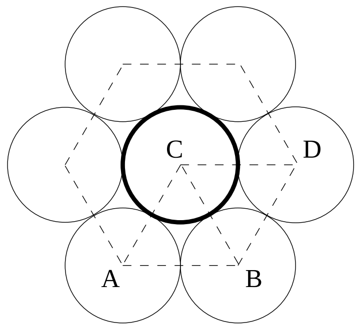
$$F + E = 130, \quad C + E = 150, \quad F + C + E + N = 200.$$

Si potrebbe subito osservare che si tratta di un sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite la cui soluzione, quando esiste, non può essere unica. Questo permette di scartare le risposte A, B, C, D, per cui la risposta esatta non può essere che **(E)**.
Procedendo in maniera costruttiva osserviamo invece che:

$$130 + 150 = (F + E) + (C + E) = (F + C + E) + E = (200 - N) + E,$$

cioè $E = 80 + N$. Il valore massimo di N è 50 e corrisponde al caso in cui tutti i 130 partecipanti alla gara di fisica abbiano anche partecipato alla gara di chimica. N dovrà necessariamente essere un numero non negativo per cui potrà assumere un qualunque valore intero compreso tra 0 e 50. A ciascun valore lecito di N corrisponderà una diversa soluzione con E che potrà assumere un qualunque valore intero tra 80 e 130 inclusi. Il problema ammette quindi 51 soluzioni distinte per cui i dati forniti non sono sufficienti ad individuare un particolare valore di E.

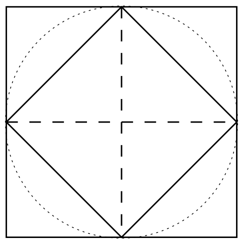
14. La risposta è **(B)**.
Indichiamo con r la lunghezza del raggio del gettone blu e con R quella del raggio dei gettoni rossi.
Per simmetria il centro del gettone blu deve trovarsi nel centro C dell'esagono. Il triangolo ABC è equilatero poiché i centri dei gettoni rossi sono disposti sui vertici di un esagono regolare. In particolare $\overline{AB} = \overline{BC} = 20$ cm. D'altra parte $\overline{BC} = r+R = r+10$ cm, da cui $r = 10$ cm.
Alternativamente si può osservare che $\widehat{ABD} = 120°$, che $\widehat{BCD} = \widehat{CAB} = 60°$ e quindi che $ABCD$ è un parallelogramma. Quindi $\overline{AB} = \overline{CD}$ e possiamo procedere come in precedenza.



15. La risposta è **(B)**.
$\Big|\big||a|+3\big|-2\Big| = 1$ significa che $\big||a|+3\big|-2$ può essere uguale a 1 oppure uguale a -1, cioè $\big||a|+3\big|$ vale 3 oppure 1. Qualunque sia il valore di a, il suo valore assoluto è non negativo quindi $\big||a|+3\big| \geq 3$ in ogni caso. Di conseguenza l'unica possibilità è che sia $\big||a|+3\big| = 3$, da cui $a = 0$. L'equazione ammette una sola soluzione.

16. La risposta è **(B)**.
Indicato con x il numero dei compagni di Andrea, la cifra che prevede di spendere è $13x$ centesimi mentre quella che effettivamente spende è $10x$ centesimi. La differenza tra queste corrisponde esattamente al costo di 6 caramelle, cioè a 60 centesimi. Di conseguenza x può essere determinato risolvendo l'equazione $13x - 10x = 60$, ovvero $3x = 60$, da cui $x = 20$. La risposta esatta è la **B**.

17. La risposta è **(C)**.
Q' è un quadrato inscritto nella circonferenza e può essere disegnato indifferentemente con i lati paralleli a quelli di Q o con i vertici nei punti di contatto tra Q e la circonferenza.
Tracciando le diagonali di Q' il quadrato Q risulta diviso in 8 triangoli rettangoli isosceli congruenti di cui quattro fanno parte anche di Q'. Il rapporto fra le due aree risulta essere $8/4 = 2$.



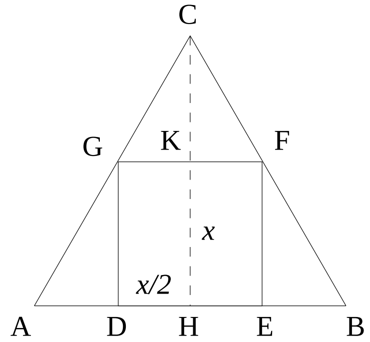
18. La risposta è **(B)**.
Conviene calcolare il numero richiesto per differenza tra il numero totale di permutazioni (cioè $5! = 120$) e quelle in cui troviamo due consonanti consecutive.
Ci sono quattro modi distinti di avere due consonanti consecutive: ai posti 1 e 2, ai posti 2 e 3, 3 e 4, 4 e 5. Per ciascuna di queste possibilità possiamo disporre le due consonanti in due modi diversi (SL ed LS) e le tre vocali in $3! = 6$ modi. Di conseguenza, il numero totale di ordinamenti delle lettere di ISOLA in modo da avere due consonanti consecutive è $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$. Il numero di ordinamenti richiesto è allora $120 - 48 = 72$.

19. La risposta è **(D)**.
Supponiamo che Andrea sia sincero. Allora l'affermazione che fa è vera e quindi è vero che Barbara è sincera. Di conseguenza è vero anche quello che dice Barbara ovvero che sia Andrea che Ciro sono sinceri. In particolare afferma che è vera l'affermazione di Ciro, ovvero che Andrea è bugiardo. Questo contraddice la nostra ipotesi di partenza. Di conseguenza Andrea non può essere sincero, ovvero **Andrea è bugiardo**.
Come conseguenza l'affermazione di Andrea è falsa, cioè anche **Barbara è bugiarda**.
L'affermazione di Barbara d'altra parte non può essere vera (Andrea è bugiardo quindi Andrea

e Ciro non possono essere entrambi sinceri). Fermandosi a questo punto niente si può dire della situazione di Ciro. Resta però da esaminare l'affermazione da lui fatta, cioè "Andrea è bugiardo" che sappiamo essere vera. Di conseguenza **Ciro è sincero**.

20. La risposta è **(B)**.
Sia CH l'altezza del triangolo ABC relativa alla base AB e sia $x = \overline{DE}$. Osserviamo che i triangoli AHC e GKC sono simili; vale quindi la proporzione:

$$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{GK} : \overline{CK}.$$



D'altra parte, $\overline{AH} = 1$ m, $\overline{CH} = \sqrt{3}/2$ m, $\overline{GK} = x/2$ m e $\overline{CK} = \overline{CH} - x = \sqrt{3}/2 - x$ m. Segue allora:

$$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} - x, \quad \text{cioè} \quad \sqrt{3}x = \sqrt{3} - 2x.$$

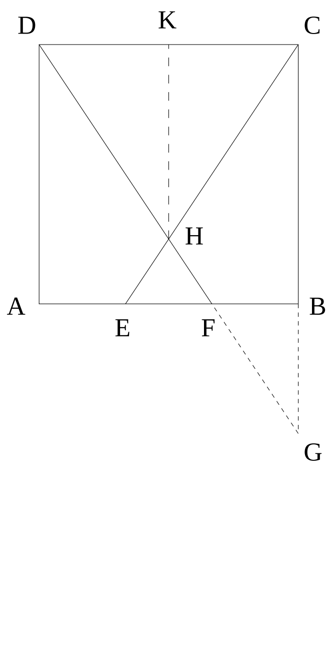
Ricavando la x,

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \text{ m} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3} \text{ m} = (2\sqrt{3} - 3) \text{ m}.$$

21. La risposta è **(D)**.
La cifra delle unità di un prodotto è determinata soltanto dal prodotto delle cifre delle unità dei fattori. Quindi:
17^2 ha la stessa cifra delle unità di 7×7 cioè 9;
17^3 ha la stessa cifra delle unità di 9×7 cioè 3;
17^4 ha la stessa cifra delle unità di 3×7 cioè 1;
17^5 ha la stessa cifra delle unità di 1×7 cioè 7, ovvero la stessa cifra delle unità di 17^1.
La cifra delle unità delle potenze di 17 si ripete dunque ogni 4 valori consecutivi dell'esponente.
Poiché $17 = 4 \cdot 4 + 1$ la cifra delle unità di 17^{17} è la stessa di 17^1, cioè 7.

22. La risposta è **(C)**.
Indichiamo con x il numero delle motociclette e con y il numero delle auto danneggiate. I veicoli danneggiati sono $x + y = 44$ mentre gli pneumatici sono $2x + 4y = 144$.
Quindi: $2x+4y = 2(x+y)+2y = 2 \cdot 44+2y = 144$ da cui $y = 28$. Il numero delle motociclette danneggiate è allora $x = 44 - y = 16$.

23. La risposta è **(C)**.
Il triangolo CDH è isoscele. Se HK è la sua altezza relativa a CD si ha $\overline{DK} = \overline{KC}$. Sia poi G il punto di intersezione tra il prolungamento di BC e il prolungamento di DF. I triangoli DHK e DGC sono simili quindi $\overline{HK} = \frac{1}{2}\overline{CG}$. Anche i triangoli FBG e DCG sono simili per cui vale la proporzione $\overline{DC} : \overline{FB} = \overline{CG} : \overline{BG}$, da cui $3\overline{BG} = \overline{CG}$. Inoltre $\overline{CG} = \overline{BC} + \overline{BG}$ e quindi $\overline{CG} = \frac{3}{2}\overline{BC} = 18$ m e $\overline{HK} = \frac{1}{2}\overline{CG} = 9$ m. Infine,



$$\text{area } (DCH) = \frac{\overline{DC} \cdot \overline{HK}}{2} = \frac{12 \cdot 9}{2} \text{ m}^2 = 54 \text{ m}^2$$

24. La risposta è **(B)**.
Utilizzando i noti criteri di divisibilià per 3 e per 11 si possono escludere subito le risposte **C** ed **E**. Ricordando poi la formula per il quadrato di un binomio, abbiamo che $(10000 + 1)^2 = 100000000 + 2 \cdot 10000 + 1 = 100020001$ ovvero il numero proposto è un quadrato perfetto (quindi anche la **A** è falsa). Se fosse vera anche la **D** il numero assegnato dovrebbe essere contemporaneamente un cubo e un quadrato di un intero, ovvero dovrebbe esistere un intero di cui è la sesta potenza. In altre parole 10001 dovrebbe essere in cubo di un intero ma così non è. L'unica risposta possibile è la **B**.

25. La risposta è **(A)**.
Il cubo Q è individuato dagli spigoli OA, OB, OC di lunghezza pari a quella del raggio della sfera. Il centro della sfera coincide dunque con il vertice O del cubo. Per simmetria, il piano contenente i punti B, O, C divide la sfera in due parti di uguale volume. La calotta così ottenuta è a sua volta divisa in due parti uguali dal piano passante per A, O, B. Il piano C, O, A infine divide ancora in due parti uguali lo spicchio sferico $ABCD$. Di conseguenza il volume della parte di sfera contenuta in Q è un ottavo del volume della sfera da cui siamo partiti.