PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede - Soluzioni Biennio

22 novembre 2006

Griglia delle risposte corrette

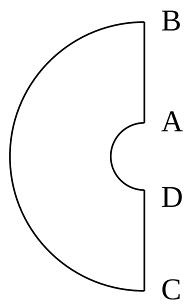
Problema	Risposta corretta
1	D
2	C
3	E
4	C
5	A
6	A
7	B
8	D
9	E
10	C

Problema	Risposta corretta
11	C
12	D
13	B
14	B
15	C
16	E
17	B
18	C
19	B
20	A

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(D)**.
   Deve essere $a + b = 0$; sostituendo si ottiene $\dfrac{c}{2} - \dfrac{c}{3} = 0$, cioè $\dfrac{c}{6} = 0$. L'unica possibilità è che sia $c = 0$.

2. La risposta è **(C)**.
   Possiamo suddividere il perimetro del disegno in quattro parti: due segmenti (AB e CD) e due semicirconferenze (gli archi BC e DA di raggio rispettivamente 4 cm e 1 cm). La lunghezza dei segmenti è pari alla differenza tra i raggi delle due circonferenze: $\overline{AB} = \overline{CD} = 3\,\text{cm}$.
   La lunghezza delle semicirconferenze è la metà della lunghezza della circonferenza corrispondente: $\overline{BC} = \dfrac{2\pi \cdot 4}{2} = 4\pi$ cm; $\overline{DA} = \dfrac{2\pi \cdot 1}{2} = \pi$ cm. In definitiva, $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = (6 + 5\pi)$ cm.

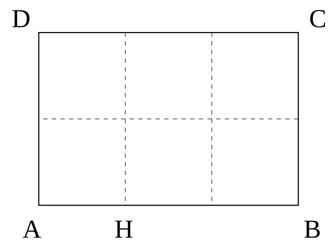


3. La risposta è **(E)**.
   La scomposizione in fattori primi di $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$ è: $2^3 \cdot 3 \cdot 5$. Un suo divisore avrà quindi una scomposizione in fattori primi del tipo $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$ dove $a = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, $b = 0,\ 1$, $c = 0,\ 1$. Ciascun divisore è individuato da una particolare scelta della terna $(a,\ b,\ c)$. Contare i divisori equivale a contare quante terne distinte si possono formare. Ci sono 4 possibili scelte per il valore di a, due per i valori di b e di c per cui complessivamente le terne $(a,\ b,\ c)$ possibili sono $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$.

4. La risposta è **(C)**.
   Se indichiamo con x il prezzo originale dell'oggetto, il prezzo scontato del 15% si può scrivere come $\dfrac{100 - 15}{100}\,x = \dfrac{17}{20}\,x$. Quindi $x = \dfrac{20}{17}\,106.25$ euro $= \dfrac{2125}{17}$ euro $= 125$ euro.

5. La risposta è **(A)**.
I primi tre termini della successione che viene costruita sono 3, 9, 81. Siamo giunti ad un termine la cui cifra delle unità è 1, di conseguenza ogni volta che sostituiamo il numero con il suo quadrato la cifra delle unità non cambierà più: $1 \times 1 = 1$. Tutti i termini dal terzo in poi avranno 1 come cifra delle unità.

6. La risposta è **(A)**.
Il rettangolo in questione può essere suddiviso in 6 quadrati di lato AH, dove $\overline{AH} = \frac{1}{3}\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{BC}$. L'area del rettangolo è quindi $\overline{AB} \cdot \overline{BC} = 6\,\overline{AH}^2 = 150$ m^2 cioè $\overline{AH} = 5$ m.



Il perimetro del rettangolo quindi vale $2\,\overline{AB} + 2\,\overline{BC} = 6\,\overline{AH} + 4\overline{AH} = 10\,\overline{AH} = 50$ m.

Alternativamente, indicate con x ed y la misura della base e dell'altezza del rettangolo rispettivamente, abbiamo $xy = 150$ m^2, $x = \frac{3}{2}y$ da cui si ottiene $y = 10$ m ed $x = 15$ m. Il perimetro è dato infine da $2x + 2y = 50$ m

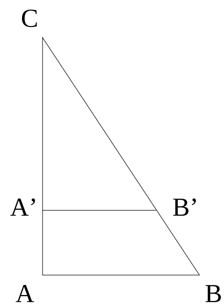
7. La risposta è **(B)**.
Il più grande multiplo di tre inferiore a 2000 è 1998. I multipli di tre successivi possono essere scritti come $a_k = 1998 + 3\,k$ con k intero positivo. Ad esempio per $k = 1$ otteniamo $a_1 = 2001$, il più piccolo tra i numeri cercati. Si tratta di stabilire qual è il più grande valore di k per cui $a_k < 4000$, cioè per cui $1998 + 3k < 4000$.
La disuguaglianza è soddisfatta per $k < \frac{4000 - 1998}{3}$, cioè per $k < \frac{2002}{3} = 667 + \frac{1}{3}$ ma, dato che k è intero positivo, questo equivale a dire $k \leq 667$. Il numero dei multipli di 3 compresi tra 2000 e 4000 è quindi 667.

8. La risposta è **(D)**.
Ricordiamo che se $a > b > 0$ allora $a^2 > b^2$. Elevando al quadrato i 3 numeri proposti si ottiene rispettivamente 9, 10, $5 + \sqrt{6}$ da cui segue subito $3 < \sqrt{10}$. Inoltre $5 + 2\sqrt{6} > 5 + 2\sqrt{4} = 9$ cioè $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$.
Resta da confrontare $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ con $\sqrt{10}$ cioè $5 + 2\sqrt{6}$ con 10 o, equivalentemente, $2\sqrt{6}$ con 5. Se confrontiamo i loro quadrati si ha: $(2\sqrt{6})^2 = 24 < 25 = 5^2$, cioè $\sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$.
In definitiva, $3 < \sqrt{2} + \sqrt{3} < \sqrt{10}$.

9. La risposta è **(E)**.

I triangoli ABC e $A'B'C$ sono simili. Sappiamo che il rapporto tra le aree di due figure simili è uguale al quadrato del rapporto tra 2 lati corrispondenti. Di conseguenza,

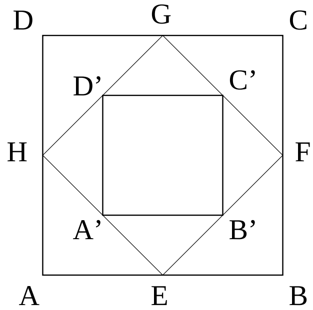
$$\left(\frac{\overline{A'C}}{\overline{AC}}\right)^2 = \frac{\text{area}\,(A'B'C)}{\text{area}\,(ABC)} = \frac{3}{4}, \quad \text{cioè} \quad \overline{A'C} = \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{m}$$



10. La risposta è **(C)**.
Se Maria avesse mentito allora sarebbe falsa anche l'affermazione fatta da Luca, cosa che non è possibile dato che solo uno dei tre mente. Alla stessa conclusione si giunge supponendo che sia Giorgio a mentire. L'unica possibilità è che il mentitore sia Luca: in questo caso l'affermazione di Maria e quella di Giorgio sono compatibili e da queste si deduce che nel sacchetto ci sono 3 biglie e sono tutte nere.

11. La risposta è **(C)**.
I triangoli AHE, EBF, FCG e GDH hanno la stessa area, di conseguenza,

$$\begin{aligned}\text{area}\,(EFGH) &= \text{area}\,(ABCD) - 4\,\text{area}\,(AEH) = \\ &= \overline{AB}^2 - 4\,\frac{\overline{AE}\times\overline{AH}}{2} = \overline{AB}^2 - \frac{1}{2}\,\overline{AB}^2 = \\ &= \frac{1}{2}\text{area}\,(ABCD).\end{aligned}$$



Ad ogni passo della costruzione il valore dell'area del quadrato si dimezza, cioè area $(A'B'C'D') = \frac{1}{2}$ area $(EFGH) = \frac{1}{4}$ area $(ABCD)$.

12. La risposta è **(D)**.
La parola contiene esattamente 2 vocali che andranno ad occupare la prima e l'ultima posizione. Questo può essere fatto soltanto in 2 modi: "A− − −I" oppure "I− − −A". Le 3 consonanti dovranno essere disposte nelle 3 posizioni centrali; abbiamo a disposizione tre scelte per la consonante in seconda posizione, 2 (una consonante è già stata scelta) per quella in terza posizione, mentre per la quarta posizione la scelta è obbligata, essendo rimasta solo una lettera a disposizione. Ci sono dunque $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ permutazioni possibili per le tre consonanti. Ricordando che per ogni permutazione possibile delle consonanti ci sono 2 possibili permutazioni delle vocali, il numero totale di disposizioni delle lettere è $6 \cdot 2 = 12$.

13. La risposta è **(B)**.
Il candidato sconfitto ha ricevuto il 32% dei voti, che sommati al 64% dei voti del candidato eletto danno il 96% dei voti degli aventi diritto. I 3 soci che non hanno votato corrispondono di conseguenza al 4% degli aventi diritto. Se indichiamo con x il numero totale dei soci, allora $3\colon x = 4\colon 100$ da cui si ricava $x = 75$.

14. La risposta è **(B)**.
Conviene immaginare che la deposizione dei gettoni avvenga in due fasi. Prima depositiamo su tutte le caselle un numero di gettoni pari al numero della riga cui appartengono, poi depositiamo su tutte un numero di gettoni pari al numero della colonna.
In entrambi i casi depositiamo 8 volte 1 moneta, 8 volte 2 monete, 8 volte 3 monete fino a 8 volte 8 monete per l'ultima riga o colonna. Quindi per ciascuna delle due fasi depositiamo $8 \cdot (1 + 2 + \ldots + 8) = 8 \cdot 36 = 288$ gettoni. Il numero totale di gettoni depositati è quindi $2 \cdot 288 = 576$.

15. La risposta è **(C)**.
Al passare di ogni ora, il valore P del patrimonio di Paperone aumenta del 50%. Il suo valore è allora quello precedente aumentato della sua metà. In altre parole, ad ogni ora il valore del patrimonio aumenta da P a $P\left(1+\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}P$. Al termine delle 4 ore che intercorrono tra le 12 e le 16 il patrimonio varrà quindi $\left(\frac{3}{2}\right)^4$ volte il suo valore iniziale, cioè $64 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^4 = 324$ fantastiliardi.

16. La risposta è **(E)**.

Indichiamo con N il numero di studenti che non hanno partecipato a nessuna competizione, con F e C il numero di quelli che hanno partecipato soltanto alle gare di fisica e chimica rispettivamente, con E il numero di quelli che hanno partecipato ad entrambe.
Il testo del problema fornisce le informazioni seguenti:

$$F + E = 130, \quad C + E = 150, \quad F + C + E + N = 200.$$

Si potrebbe subito osservare che si tratta di un sistema lineare di 3 equazioni in 4 incognite la cui soluzione, quando esiste, non può essere unica. Questo permette di scartare le risposte A, B, C, D, per cui la risposta esatta non può essere che **(E)**.
Procedendo in maniera costruttiva osserviamo invece che:

$$130 + 150 = (F + E) + (C + E) = (F + C + E) + E = (200 - N) + E,$$

cioè $E = 80+N$. Il valore massimo di N è 50 e corrisponde al caso in cui tutti i 130 partecipanti alla gara di fisica abbiano anche partecipato alla gara di chimica. N dovrà necessariamente essere un numero non negativo per cui potrà assumere un qualunque valore intero compreso tra 0 e 50. A ciascun valore lecito di N corrisponderà una diversa soluzione con E che potrà assumere un qualunque valore intero tra 80 e 130 inclusi. Il problema ammette quindi 51 soluzioni distinte per cui i dati forniti non sono sufficienti ad individuare un particolare valore di E.

17. La risposta è **(B)**.
Sia CH l'altezza del triangolo ABC relativa alla base AB e sia $x = \overline{DE}$. Osserviamo che i triangoli AHC e GKC sono simili; vale quindi la proporzione:

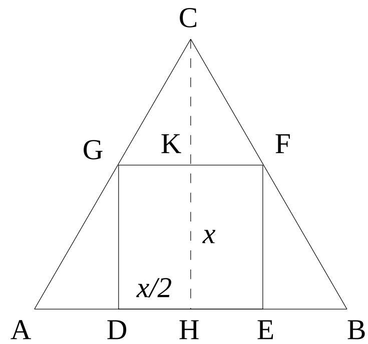
$$\overline{AH} : \overline{CH} = \overline{GK} : \overline{CK}.$$

D'altra parte, $\overline{AH} = 1$ m, $\overline{CH} = \sqrt{3}/2$ m, $\overline{GK} = x/2$ m e $\overline{CK} = \overline{CH} - x = \sqrt{3}/2$ m $-x$. Segue allora:

$$\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} - x, \quad \text{cioè} \quad \sqrt{3}x = \sqrt{3} - 2x.$$

Ricavando la x,

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\ \text{m} = \frac{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{4-3}\ \text{m} = (2\sqrt{3} - 3)\ \text{m}.$$



18. La risposta è **(C)**.
Un numero è divisibile per 44 se e solo se è divisibile sia per 4 che per 11. In particolare la cifra delle unità dovrà essere pari. Un numero è divisibile per 11 se la somma delle cifre di posto pari meno la somma delle cifre di posto dispari è un multiplo di 11. Nel nostro caso l'unica possibilità è che la differenza tra le due somme sia zero e, poichè la cifra delle unità deve essere pari, questo accade soltanto se le cifre pari sono quelle di unità e centinaia.
Restano possibili soltanto quattro situazioni: 3476, 3674, 7436, 7634 ma possiamo sfruttare ancora la divisiblità per quattro. Un numero è divisibile per quattro se e solo se lo è il numero formato dalle sole cifre di unità e decine. Questa condizione è soddisfatta soltanto da 3476 e da 7436.

19. La risposta è **(B)**.
Il primo membro dell'equazione può essere scritto come

$$(x+1) + \left(\frac{x}{2}+1\right) + \left(\frac{x}{3}+1\right) + \ldots + \left(\frac{x}{100}+1\right) = 100 + x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right)$$

Di conseguenza x deve soddisfare

$$100 + x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right) = 100, \quad \text{ovvero} \quad x\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{100}\right) = 0$$

Il coefficiente della x è diverso da zero e quindi deve essere $x = 0$, ovvero $-1 \leq x \leq 1$.

20. La risposta è **(A)**.

Il cubo Q è individuato dagli spigoli OA, OB, OC di lunghezza pari a quella del raggio della sfera. Il centro della sfera coincide dunque con il vertice O del cubo. Per simmetria, il piano contenente i punti B, O, C divide la sfera in due parti di uguale volume. La calotta così ottenuta è a sua volta divisa in due parti uguali dal piano passante per A, O, B. Il piano C, O, A infine divide ancora in due parti uguali lo spicchio sferico $ABCD$. Di conseguenza il volume della parte di sfera contenuta in Q è un ottavo del volume della sfera da cui siamo partiti.