UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2004

GARA di SECONDO LIVELLO BIENNIO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE
Per la valutazione dei primi quattordici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
A	D	A	A	B	C	A	D	A	D	105	150	114	2004

SECONDA PARTE
Contrariamente ai primi quattordici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, l'ultimo problema richiede una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questo esercizio, diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 12.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 12 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quella da noi proposta.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Nelle linee della dimostrazione proposta, attribuire:

1. Fino a tre punti a chi dimostra la tesi per uno o più valori particolari di n; ad esempio $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.
2. Fino a sette punti a chi riduce i tre parametri liberi a, b e c a due, scegliendo ad esempio $c = a - 1$.
3. Otto punti per chi, ponendo $c = a - 1$ (o una scelta analoga), scrive l'equazione nella forma $n = b^2 - 2a + 1$.
4. I restanti quattro punti per la dimostrazione che la precedente equazione possiede sempre una soluzione (a, b), comunque sia n.

1. La risposta è **(A)**. Del triangolo $A'BC'$ si conoscono due lati (BA' di lunghezza 2 e BC' di lunghezza 3) e l'angolo compreso (che per differenza risulta essere di 60°). L'area è dunque $2 \cdot 3 \cdot sen(60°)/2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.
SECONDA SOLUZIONE
Si prolunghino i lati AA' e CC' sino ad incontrarsi nel punto B'. Il triangolo ACC' è equilatero di area $\dfrac{25}{4}\sqrt{3}$. L'area cercata è pari alla metà dell'area del parallelogramma $BA'B'C'$, che si calcola facilmente sottraendo all'area del triangolo ACC' quelle dei triangoli equilateri ABA' e CBC'.

2. La risposta è **(D)**. Difatti per compensare la mancanza di 10 grammi di pane Piero deve mangiare 20 grammi di pasta in più. Ciò significa che 10 grammi di pane equivalgono a 20 grammi di pasta. Se Piero volesse mangiare solo pasta, dovrebbe dunque mangiarne esattamente 160 grammi.
SECONDA SOLUZIONE
Sia a la quantità di carboidrati per grammo di pasta e b la quantità di carboidrati per grammo di pane. Sappiamo che $80a + 40b = 100a + 30b$, da cui $2a = b$. Noi stiamo cercando un numero x tale che $x \cdot a = 80a + 40b = 160a$, da cui si ottiene $x = 160$.

3. La risposta è **(A)**. Se Alberto sa tutte e tre le lingue, ciò contraddice la (iii). Se ne sa una qualunque, allora ne sa anche almeno un'altra, in base alla corrispondente implicazione (i), (ii) o (iii). Ma se ne sa esattamente due, non può sapere il tedesco per (i) e quindi nemmeno l'inglese per (iii), assurdo. Quindi non sa nessuna di tali lingue.

4. La risposta è **(A)**. L'intersezione fra i due cerchi aventi per diametri i cateti è contenuta nel cerchio avente per diametro l'ipotenusa; quest'ultimo cerchio può quindi essere tralasciato. I due cerchi aventi per diametri i cateti si intersecano nel vertice A dell'angolo retto e nel punto medio M dell'ipotenusa, perchè M dista 1/2 da ciascuno dei cateti. Tracciata l'altezza AM, la figura di cui ci occorre l'area risulta formata da due segmenti circolari uguali, staccati su cerchi di raggio 1/2 da corde sottese da angoli retti. L'area di ciascun segmento circolare è la differenza fra 1/4 dell'area del cerchio e l'area di un triangolo rettangolo isoscele con cateti di lunghezza 1/2. Grazie a queste considerazioni calcoliamo l'area richiesta nel modo seguente:

$$\text{Area} = 2(\pi/16 - 1/8) = (\pi - 2)/8\,.$$

5. La risposta è **(B)**. Per risolvere questo esercizio è utile pensare alla superficie laterale di un cilindro come a un rettangolo. Se tagliamo la superficie laterale della colonna lungo un qualsiasi segmento verticale che ne congiunge la base alla cima e *srotoliamo* la superficie, otteniamo un rettangolo di base 3 m e altezza 8 m. Poiché la lumaca compie due giri, affianchiamo due rettangoli di queste dimensioni, lungo il lato di 8 m. Otteniamo così un rettangolo R di base 6 m e altezza 8 m. Se inizialmente avevamo tagliato lungo la verticale che passa per il punto di partenza della lumaca, il suo cammino è una curva contenuta in R che unisce il vertice in basso a sinistra con quello in alto a destra. La lunghezza minima che questa curva può avere si ha nel caso in cui essa sia una diagonale di R, ed è dunque 10 m.

6. La risposta è **(C)**. Difatti almeno due dei quattro numeri devono essere maggiori o uguali a 8. In caso contrario potremmo sceglierne tre, ciascuno minore di 8, e la loro somma sarebbe minore di 24, assurdo. Da ciò segue immediatamente che II e III sono vere. Invece I e IV sono false: basta considerare la quaterna (22,22,1,1) per falsificarle entrambe.

7. La risposta è **(A)**. Poiché $1 + \frac{1}{k} = \frac{k+1}{k}$ possiamo riscrivere il prodotto come

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n+1}{n}$$

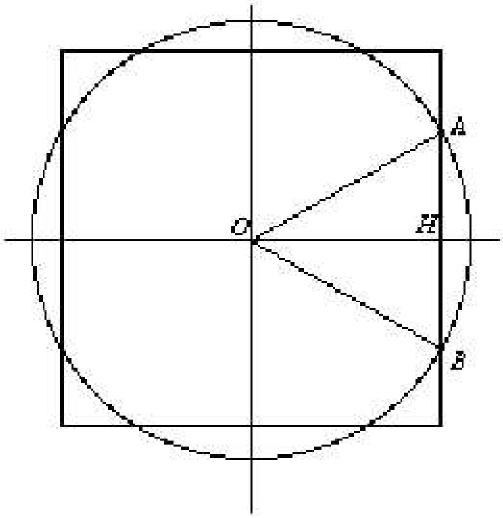
in cui ogni numeratore si cancella col denominatore successivo, tranne il primo denominatore e l'ultimo numeratore. Quindi il prodotto vale $\frac{n+1}{2}$, che è intero solo se n è dispari.

8. La risposta è **(D)**. Consideriamo le ultime cifre decimali dei numeri $a_1, \dots, a_n$. Se esse sono tutte distinte, nessuna differenza fra due dei numeri è divisibile per 10. Se inoltre le cifre sono $0, 1, 2, 3, 4, 5$ nessuna somma fra due dei numeri è divisibile per 10. Ne segue che il numero cercato è maggiore o uguale a 7. D'altra parte, se $n \geq 7$, si danno due casi:
o ci sono due ultime cifre uguali, e in tal caso la differenza dei numeri corrispondenti è divisibile per 10;

o mancano al massimo tre ultime cifre decimali, per cui almeno una delle seguenti possibilità è verificata:
ci sono entrambe le cifre 1 e 9;
ci sono entrambe le cifre 2 e 8;
ci sono entrambe le cifre 3 e 7;
ci sono entrambe le cifre 4 e 6.
In tutti i casi, ci sono due numeri la cui somma è divisibile per 10.

9. La risposta è **(A)**. Detto p il numero degli a_i positivi, si ha $n + p = 13$ e $3 \leq p \leq 13$. Il numero di prodotti $a_i a_j$ negativi è pari a $n \cdot p$, cosicché $np = 22$ e p è un divisore di 22. L'unico divisore di 22 compreso tra 3 e 13 è 11, per cui si conclude che $p = 11$ e $n = 2$.

10. La risposta è **(D)**. Prima della collocazione del cubo la lampada illumina sul piano a un cerchio di raggio $2/\sqrt{3}$. La faccia superiore del cubo dista 1 m dalla lampada, e oscura con la sua ombra la parte di detto cerchio compresa in un quadrato di lato 2, m concentrico al cerchio. Sul piano a rimangono illuminati quattro segmenti circolari uguali; uno di questi è in figura delimitato dall'arco e dalla corda AB.



Poiché $OH = 1$ m e $OA = 2/\sqrt{3}$ m, si ha $\cos(A\widehat{O}H) = \sqrt{3}/2$ e quindi $A\widehat{O}H = 30°$, e $A\widehat{O}B = 60°$. Pertanto l'area del segmento circolare è la differenza fra l'area di 1/6 di cerchio di raggio $2/\sqrt{3}$ e l'area del triangolo equilatero OAB di lato $2/\sqrt{3}$ m e altezza 1 m. L'area complessiva dei quattro segmenti circolari illuminati sul piano a misura dunque $4(\pi(2/\sqrt{3})^2/6 - 1/\sqrt{3})\text{m}^2 = 8\pi/9 - 4/\sqrt{3}\text{m}^2$. Passiamo alla faccia superiore, sul piano parallelo ad a, a distanza 1 m dalla lampada. La parte illuminata di questa faccia (quadrata, di lato 1 m) è la sua intersezione con il cerchio di raggio $1/\sqrt{3}$ concentrico al quadrato: la figura illuminata su questo piano è quindi il cerchio, privato dei quattro segmenti circolari esterni al quadrato. La figura che si forma è simile a quella analizzata sul piano a, con rapporto di similitudine 1/2; l'area complessiva dei quattro segmenti circolari misura quindi 1/4 del valore calcolato sopra, cioè $2\pi/9 - 1/\sqrt{3}\text{m}^2$. L'area illuminata della faccia superiore misura quindi $(\pi(1/\sqrt{3})^2 - (2\pi/9 - 1/\sqrt{3}))\text{m}^2 = (\pi/9 + 1/\sqrt{3})\text{m}^2$. Addizionando i due risultati otteniamo l'area complessiva illuminata dalla lampada: $(8\pi/9 - 4/\sqrt{3} + \pi/9 + 1/\sqrt{3})\text{m}^2 = (\pi - \sqrt{3})\text{m}^2$.

11. La risposta è 105. Si prolunghi il lato AH del quadrato fino al vertice E. Il triangolo AHF è isoscele (i lati AH e AF hanno la stessa lunghezza) e poichè l'angolo $F\widehat{A}H$ misura $120 - 90 = 30$ gradi, l'angolo $A\widehat{H}F$ misura $(180 - 30)/2 = 75$ gradi. Quindi $F\widehat{H}E$ misura $180 - 75 = 105$ gradi.

12. La risposta è 150. Sia h l'altezza delle due candele. Dopo x minuti, l'altezza della prima candela sarà uguale ad $h\left(1 - \frac{x}{300}\right)$, mentre quella della seconda candela sarà $h\left(1 - \frac{x}{180}\right)$. La condizione posta dà l'equazione
$$1 - \frac{x}{300} = 3\left(1 - \frac{x}{180}\right) ,$$
da cui $x = 150$.

13. La risposta è 114. Se una persona su 76 è allergica alle fragole, allora lo sono 3 persone su $76 \times 3 = 228$ persone; di queste 3 una è un uomo (poiché due su tre sono donne), quindi un uomo su 228 persone è allergico. Infine, poiché il numero di uomini è uguale al numero delle donne, un uomo ogni $228 : 2 = 114$ uomini è allergico alle fragole.

14. La risposta è 2004. L'equazione data può scriversi come

$$(x+y)^2 - 2004(x+y) - 2005 = 0,$$

da cui si ottiene $x + y = 2005$ in quanto l'altra soluzione $x + y = -1$ non è accettabile, non potendo essere la somma di due interi positivi. Dunque x può assumere tutti i valori tra 1 e 2004, e corrispondentemente sarà $y = 2005 - x$

15. Fissiamo il numero intero n. Osserviamo che se $n = 0$ la tesi risulta vera prendendo $a = b = c = 0$; supponiamo allora che n sia diverso da zero. Sia k un numero intero, che determineremo successivamente; scegliamo $a = k$ e $c = k - 1$. L'uguaglianza $n = a^2 + b^2 - c^2$ diventa

$$n = b^2 + 2k - 1\,.$$

Se n è divisibile per 2, scegliamo $b = 1$ e $k = n/2$. Se n non è divisibile per due, allora scegliamo $b = 0$ e $k = (n+1)/2$. In entrambi i casi l'uguaglianza risulta verificata.

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2004

GARA di SECONDO LIVELLO TRIENNIO

Norme per la correzione ad uso degli insegnanti

Come per lo scorso anno, la prova è distinta in due parti: la prima a risposte predefinite, la seconda di tipo compilativo.

PRIMA PARTE

Per la valutazione dei primi quindici quesiti si potrà usufruire della mascherina che segue; le lettere o i numeri in ciascuna finestrella rappresentano, per ciascun quesito, le risposte esatte. Contrassegnando allora, per ogni elaborato, le risposte esatte con una sbarra e scrivendo nello spazio apposito il numero delle risposte esatte e quello delle caselle senza risposta si trova subito il punteggio globale di questa prima parte.
Si ricorda che alle risposte errate vanno attribuiti zero punti.

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
A	D	C	A	A	C	A	D	E	C	2004	150	24	22	450

SECONDA PARTE

Contrariamente ai primi quindici quesiti, la cui valutazione è puramente meccanica, gli ultimi due problemi richiedono una correzione attenta da parte dell'insegnante di matematica. Per alleviare il carico di lavoro degli insegnanti, che già tanti compiti debbono correggere e valutare, suggeriamo di effettuare la correzione soltanto di quegli elaborati che hanno ottenuto un punteggio di almeno 30 nella prima parte. Per ottenere un minimo di omogeneità nella valutazione di questi esercizi diamo qualche indicazione sul punteggio da attribuire.

1. Ciascuno di tali esercizi sarà valutato con un numero intero da 0 a 15.
2. Si raccomanda di usare l'intero spettro dei punteggi disponibili, attribuendo zero, senza remore, alle soluzioni completamente sbagliate e 15 a quelle corrette, anche se non coincidenti con quelle da noi proposte.
3. Valutare con punteggi intermedi soluzioni parziali o solo parzialmente corrette.

Ad esempio, nel caso dell'Esercizio 16 si propone di: assegnare 3 punti a chi osserva che ogni radice divide $3pq$; assegnare altri 3 punti a chi scrive entrambe le relazioni tra radici e coefficienti dell'equazione; assegnare 3 punti per ogni coppia di numeri primi

Nel caso dell'Esercizio 17 si propone di assegnare:

1. 1 punto a chi ha tracciato la diagonale BD;
2. 2 punti a chi ha scritto un buon numero di relazioni tra le lunghezze dei segmenti che compaiono nella figura o ha applicato il Teorema di Pitagora su almeno due triangoli diversi;
3. 3 punti a chi ha fatto entrambe le cose precedenti;
4. 3 punti a chi è riuscito a scomporre come somma di quadrati uno dei due lati dell'uguaglianza (più 1 punto supplementare per avere tracciato la diagonale BD e 2 per avere applicato con successo il Teorema di Pitagora a due triangoli diversi)
5. 7 punti a chi ha scomposto entrambi i lati dell'uguaglianza (più eventuali punti supplementari come nel caso precedente).
6. 15 punti per ogni soluzione corretta e completamente giustificata, anche se diversa da quella proposta.

1. La risposta è **(A)**. Del triangolo $A'BC'$ si conoscono due lati (BA' di lunghezza 2 e BC' di lunghezza 3) e l'angolo compreso (che per differenza risulta essere di $60°$). L'area è dunque $2 \cdot 3 \cdot \sin(60°)/2 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$.
   Seconda Soluzione Alternativamente si potevano prolungare i lati AA' e CC' sino ad incontrarsi nel punto B'. Il triangolo ACC' è equilatero di area $\frac{25}{4}\sqrt{3}$. L'area cercata è pari alla metà dell'area del parallelogramma $BA'B'C'$, che si calcola facilmente sottraendo all'area del triangolo ACC' quelle dei triangoli equilateri ABA' e CBC'.

2. La risposta è **(D)**. Supponiamo per fissare le idee che il prof. Bianchi menta la domenica. Allora la frase in questione può essere detta la domenica (perché risulta falsa), il sabato (perché risulta vera) e il lunedí (perché risulta ancora vera, essendo falsa la premessa). Non può invece essere detta in altri giorni, perché risulterebbe falsa.

3. La risposta è **(C)**. Difatti le uniche possibili soluzioni sono tutti i numeri uguali ad 1, oppure un numero uguale a due, uno ad 1 e gli altri a 0. La soluzione con soli 1 è unica. Nel secondo caso invece ci sono 5 modi di scegliere la variabile con il valore 2 e 4 modi di scegliere quella pari ad 1. A questo punto non ci resta che assegnare 0 alle altre variabili. Le soluzioni totali sono dunque $1 + 5 \cdot 4 = 21$.

4. La risposta è **(A)**. Si osserva che è possibile riscrivere la somma in modo da razionalizzare le frazioni, moltiplicando numeratore e denominatore per la stessa quantità.

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n} = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$$

   La somma da calcolare vale quindi

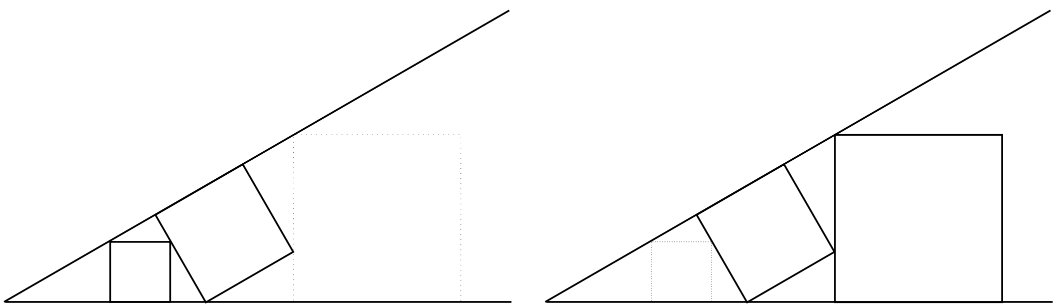
$$(\sqrt{2}-\sqrt{1}) + (\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{4}-\sqrt{3}) + \cdots + (\sqrt{100}-\sqrt{99})$$

   e in questa somma ogni termine compare una volta col segno più e una volta col segno meno ad eccezione di $-\sqrt{1}$ e di $\sqrt{100}$, quindi la somma vale $\sqrt{100}-\sqrt{1} = 10 - 1 = 9$

5. La risposta è **(A)**. Valutiamo la probabilità come quoziente tra i casi favorevoli ed i casi possibili. I casi possibili sono pari al numero di modi di scegliere 2 oggetti tra 90, senza reinserimento: $\binom{90}{2} = 4005$. I casi favorevoli sono pari a 27, dati da

$$1 + 55, \quad 2 + 54, \quad \ldots, \quad 27 + 29.$$

6. La risposta è **(C)**. Consideriamo le due parti evidenziate in grassetto nelle figure qui sotto:



   Si vede che se "ribaltiamo" la prima figura in modo da scambiare i due lati dell'angolo e la ingrandiamo con una similitudine otteniamo la seconda. Perciò le due figure sono simili: e visto che le similitudini moltiplicano per un fattore k la lunghezza dei segmenti, abbiamo (detti l, L e x i lati dei quadrati)

$$\begin{cases} L = kl \\ x = kL \end{cases}$$

   e quindi eliminando k dalle due equazioni otteniamo proprio $x = \frac{L^2}{l}$.

7. La risposta è **(A)**. Sia N il numero dei sedili. In un dato istante, la somma dei numeri di due sedili che si incrociano è costante, salvo quando si passa dal sedile numero N al sedile numero 1, nel qual caso la somma diminuisce di N. Poiché $180 + 169 = 349$, $48 + 75 = 123$ e $349 - 123 = 226$, si ottiene $N = 226$.

SECONDA SOLUZIONE
Poichè $75 - 48 = 27$, ci sono 26 sedili fra quello di Alberto e quello che incrocia: 13 procedono dietro di lui e sono prima della partenza della seggiovia ed altri 13 procedono in direzione opposta ritornando alla partenza. L'ultima seggiovia che sta tornando alla partenza ha quindi il numero 62. Analogamente, da $180 - 169 = 11$ si ricava che ci sono 5 sedili a monte di Barbara e prima dell'arrivo, e che l'ultima seggiovia prima dell'arrivo ha il numero 175. I sedili che salgono sono perciò $175 - 62 = 113$ e dunque il totale dei sedili è $113 \times 2 = 226$.

8. La risposta è **(D)**. Consideriamo i resti della divisione per 9 dei numeri $a_1, \ldots, a_n$. Se essi sono tutti distinti, nessuna differenza fra due dei numeri è divisibile per 9. Se inoltre essi sono $0, 1, 2, 3, 4$ nessuna somma fra due dei numeri è divisibile per 9. Ne segue che il numero cercato è maggiore o uguale a 6. D'altra parte, se $n \geq 6$, si danno due casi:
o ci sono due resti uguali, e in tal caso la differenza dei numeri corrispondenti è divisibile per 9;
o mancano al massimo tre resti, per cui almeno una delle seguenti possibilità è verificata:
ci sono entrambi i resti 1 e 8;
ci sono entrambi i resti 2 e 7;
ci sono entrambi i resti 3 e 6;
ci sono entrambi i resti 4 e 5.
In tutti i casi, ci sono due numeri la cui somma è divisibile per 9.

9. La risposta è **(E)**. Ogni circonferenza avente per diametro un lato del triangolo interseca gli altri due lati nei rispettivi punti medi. Perciò la figura in questione è costituita dal triangolo equilatero (di lato $1/2$) avente per vertici i tre punti medi dei lati, e da tre segmenti circolari uguali, staccati su cerchi di raggio $1/2$ da corde sottese da angoli al centro di $60°$. L'area di ciascun segmento circolare è la differenza fra $1/6$ dell'area del cerchio e l'area di un triangolo equilatero di lato $1/2$. Grazie a queste considerazioni calcoliamo l'area A richiesta nel modo seguente:

$$A = \frac{\sqrt{3}}{16} + 3\left(\frac{\pi}{24} - \frac{\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{\pi - \sqrt{3}}{8} .$$

10. La risposta è **(C)**. Soluzione 1. Si nota immediatamente che -1 è una soluzione dell'equazione per qualsiasi valore di a; pertanto, possiamo mettere in evidenza un termine $x + 1$ per ottenere

$$x^3 + (a-4)x^2 + (a+4)x + 9 = (x+1)(x^2 + (a-5)x + 9)$$

Ora, poiché $a - 5$ deve essere uguale all'opposto della somma delle due soluzioni, o nessuna o entrambe le soluzioni del polinomio $(x^2 + (a-5)x + 9)$ sono intere. Chiaramente a noi interessa solo il caso in cui sono entrambe intere. Perché l'equazione originaria abbia solo 2 soluzioni intere distinte è necessario che ci siano due radici coincidenti: e questo avviene solo quando

(a) -1 è una soluzione anche di $(x^2+(a-5)x+9)$: questo è vero solo se $(-1)^2+(a-5)(-1)+9 = 0$, cioè se $a = 15$; oppure
(b) $(x^2 + (a-5)x + 9)$ ha due soluzioni coincidenti: in questo caso imponendo che il suo discriminante sia nullo si ricava $a = -1$ o $a = 11$.

Soluzione 2. Se a, b, c sono le tre soluzioni dell'equazione (eventualmente coincidenti), si ha per il teorema di Ruffini

$$x^3 + (a-4)x^2 + (a+4)x + 9 = (x-a)(x-b)(x-c) = x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x - abc$$

Perciò, confrontando i termini dello stesso grado, $a - 4 = -(a+b+c)$ e $9 = -abc$. Dalla prima delle due uguaglianze si ricava che se ci sono due soluzioni intere anche la terza è intera; dalla seconda quindi si ricava che le soluzioni devono essere tre interi, di cui due uguali, il cui prodotto è -9: e si vede che tali terne possono essere solo:

$$\begin{array}{ccc} 1, & 1, & -9 \\ -1, & -1, & -9 \\ -1, & 3, & 3 \\ -1, & -3, & -3 \end{array}$$

Possiamo allora costruire esplicitamente i polinomi di terzo grado che hanno per radici le quattro terne di numeri dati e notare che solo le ultime tre sono del tipo richiesto nel testo (la prima risulta infatti $x^3 + 7x^2 - 17x + 9$, che non è della forma $x^3 + (a-4)x^2 + (a+4)x + 9$). In modo alternativo, si può scartare la prima terna notando (come nella prima soluzione) che -1 è una soluzione dell'equazione per ogni valore di a.

11. La risposta è 2004. L'equazione data può scriversi come

$$(x+y)^2 - 2004(x+y) - 2005 = 0,$$

da cui si ottiene $x + y = 2005$ in quanto l'altra soluzione $x + y = -1$ non è accettabile, non potendo essere la somma di due interi positivi. Dunque x può assumere tutti i valori tra 1 e 2004, e corrispondentemente sarà $y = 2005 - x$

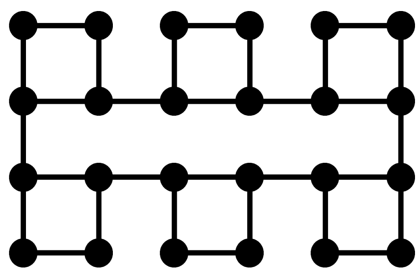
12. La risposta è 150. Sia h l'altezza delle due candele. Dopo x minuti, l'altezza della prima candela sarà uguale ad $h\left(1 - \frac{x}{300}\right)$, mentre quella della seconda candela sarà $h\left(1 - \frac{x}{180}\right)$. La condizione posta dà l'equazione

$$1 - \frac{x}{300} = 3\left(1 - \frac{x}{180}\right) ,$$

da cui $x = 150$.

13. La risposta è 24. Indicati con c il numero di abitazioni centrali, e con p il numero di abitazioni periferiche, il numero totale di strade è pari alla metà del numero di strade che fuoriescono da ogni abitazione, quindi $\frac{2p+3c}{2}$. Ma $c = p$ per ipotesi, per cui $c = p = 12$ ed il numero totale di abitazioni è 24.

Osservazione: Si osservi che esistono effettivamente configurazioni corrispondenti alla descrizione dell'esercizio. Un esempio, ma ne esistono altri differenti, è il seguente:



14. La risposta è 22. Indichiamo con a e b i due numeri inizialmente presenti sulla lavagna del professor Abacus. Il figlio li sostituisce con $ab-1$ e $a+b$, poi sostituisce questi due numeri con la loro somma e il loro prodotto, cioè $(ab-1)(a+b)-1$ e $ab-1+a+b$. La somma di questi due numeri è pari a 1309, quindi

$$(ab-1)(a+b) - 1 + ab - 1 + a + b = ab(a+b+1) - 2 = 1309$$

$$ab(a+b+1) = 1311 = 3 \cdot 19 \cdot 23$$

Se a fosse uguale a 1 avremmo che $b(b+2) = 3 \cdot 19 \cdot 23$, che non può essere perché b deve essere un divisore di 1311, e nessuno di essi verifica l'uguaglianza; lo stesso vale se b fosse 1. Quindi i tre fattori a, b e $a+b+1$ sono tutti maggiori di 1, e devono essere 3, 19 e 23; in particolare $a+b+1$ deve essere 23 perché è il maggiore dei fattori. La somma cercata è dunque $a + b = 23 - 1 = 22$.

15. La risposta è 450. La parte emersa ha volume pari ad $1/6$ del volume totale e quindi è il tetraedro che ha per vertici quattro vertici del cubetto e per facce un triangolo equilatero interno al cubetto e tre triangoli rettangoli isosceli con cateti di lunghezza 10. Dunque la parte di superficie del cubetto fuori dall'acqua è pari a 150 e quella a contatto con l'acqua è pari a $600 - 150 = 450$.

16. Se r_1 e r_2 sono le due radici dell'equazione allora valgono:

$$r_1 + r_2 = 6p - 4q\,,$$

$$r_1 r_2 = 3pq\,.$$

Dalla seconda deduciamo che r_1 e r_2 devono essere divisori di $3pq$. Essendo p e q numeri primi, le uniche coppie di radici possibili sono: $(1, 3pq)$, $(3, pq)$, $(3p, q)$, $(3q, p)$, $(-1, -3pq)$, $(-3, -pq)$, $(-3p, -q)$ e $(-3q, -p)$.

Analizziamo i vari casi. Se le radici sono 1 e $3pq$ allora deve valere

$$6p - 4q = 1 + 3pq\,.$$

Siccome p e q sono positivi, sarà $6p > 3pq$ e dunque $q < 2$. Impossibile.

Analogamente se le radici sono -1 e $-3pq$ allora deve valere

$$4q - 6p = 1 + 3pq\,,$$

da cui ricaviamo $4q > 3pq$, e quindi $p < 4/3$. Impossibile.

Se le radici sono 3 e pq allora deve valere

$$6p - 4q = 3 + pq\,.$$

Ne deduciamo che $6p > pq$ e quindi $q < 6$. Inoltre p e q devono essere entrambi dispari e quindi q potrà essere 3 oppure 5. Sostituendo otteniamo due possibili coppie di valori per p e q: $(5, 3)$ e $(23, 5)$.

Se le radici sono -3 e $-pq$ allora sarà

$$4q - 6p = 3 + pq\,.$$

Ne deduciamo che $4q > pq$ e quindi $p < 4$. Inoltre p e q devono essere entrambi dispari e quindi dovrà essere $p = 3$. Sostituendo otteniamo $q = 21$, che non è un numero primo.

Se le radici sono $3p$ e q allora deve valere

$$6p - 4q = 3p + q\,,$$

cioè $3p = 5q$. In questo caso l'unica possibilità è data dalla coppia $(5, 3)$ che avevamo già incontrato.

Se le radici sono $-3p$ e $-q$ allora deve valere

$$4q - 6p = 3p + q\,,$$

cioè $q = 3p$. Dunque q non può essere un numero primo.

Se le radici sono $3q$ e p allora deve valere

$$6p - 4q = 3q + p\,,$$

cioè $5p = 7q$. In questo caso l'unica possibilità è data dalla coppia $(7, 5)$.

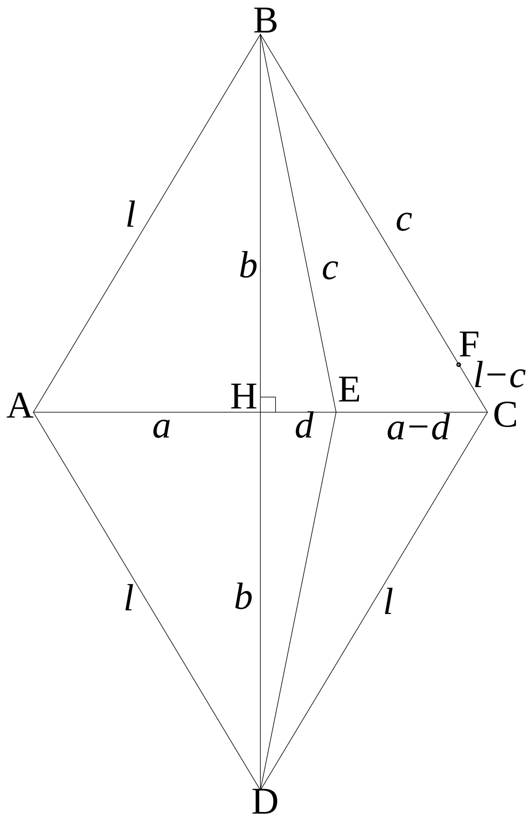
Se le radici sono $-3q$ e $-p$ allora deve valere

$$4q - 6p = 3q + p\,,$$

cioè $q = 7p$. Anche in questo caso q non può essere un numero primo.

In conclusione esistono solo tre coppie di numeri primi positivi che verificano le richieste del problema: $(5, 3)$, $(7, 5)$ e $(23, 5)$.

17. Tracciamo la diagonale BD del rombo e sia H il punto di incontro delle due diagonali (è noto che in un rombo le due diagonali sono perpendicolari).



Siano, come in figura, l il lato del rombo, $2a$ la lunghezza di AC, $2b$ la lunghezza di BD, d la distanza tra H e E, c la lunghezza di $BE = DE = BF$. La relazione da provare diventa perciò:

$$(l + c)(l - c) = (a + d)(a - d)$$

Svolgendo i prodotti notevoli possiamo trasformare questa relazione in

$$l^2 - c^2 = a^2 - d^2$$

o anche, riordinando i termini,

$$l^2 - a^2 = c^2 - d^2$$

(quest'ultima uguaglianza e quella richiesta sono quindi equivalenti). Ma questa relazione è semplice da provare: per il teorema di Pitagora applicato rispettivamente ai triangoli BHC e BHE, sappiamo che $l^2 - a^2 = b^2$ e $c^2 - d^2 = b^2$, da cui $l^2 - a^2 = c^2 - d^2$.