UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2004

GARA di SECONDO LIVELLO BIENNIO

19 febbraio 2004

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 15 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 10 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 11 al numero 14 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) L'ultimo problema richiede invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Tale problema verrà valutato con un punteggio **da 0 a 12**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:______________________COGNOME:______________________________

Indirizzo:____________________________________Città:____________________

SCUOLA:____________________________CLASSE:______ Città:_______________

Risposte ai primi 14 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–10)		$\times 5 =$	
numero delle risposte esatte (11–14)		$\times 8 =$	
numero degli esercizi senza risposta		$\times 1 =$	
valutazione esercizio n.15			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
AGIPPETROLI
Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Sia B un punto interno al segmento AC con AB di lunghezza 2 e BC di lunghezza 3. Costruiti i triangoli equilateri ABA' e CBC', dalla stessa parte rispetto al segmento AC, quanto misura l'area del triangolo $A'BC'$?
(A) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ **(B)** 3 **(C)** $3\sqrt{3}$ **(D)** 5 **(E)** $\frac{25}{8}\sqrt{3}$.

2. Per motivi dietetici, Piero deve mangiare ad ogni pranzo una quantità fissa di carboidrati provenienti da pane e/o pasta. Per totalizzare tale quantità, Piero può mangiare 80 grammi di pasta e 40 grammi di pane, oppure 100 grammi di pasta e 30 grammi di pane. Se volesse mangiare solo pasta, quanti grammi ne dovrebbe mangiare?
(A) 80 grammi **(B)** 110 grammi **(C)** 140 grammi **(D)** 160 grammi **(E)** 200 grammi.

3. Quest'anno Alberto ha provato a imparare francese, inglese e tedesco. Sapendo che
(i) se sa il tedesco, allora sa anche francese e inglese;
(ii) se sa il francese, allora sa anche un'altra lingua tra inglese e tedesco;
(iii) se sa l'inglese, allora sa il tedesco ma non il francese;
quante di tali lingue sa Alberto?
(A) Nessuna **(B)** una **(C)** due **(D)** tre **(E)** non si può determinarlo.

4. Calcolare l'area dell'intersezione di tre cerchi aventi come rispettivi diametri i tre lati di un triangolo rettangolo isoscele con i cateti di lunghezza unitaria.
(A) $\frac{\pi-2}{8}$ **(B)** $\pi-3$ **(C)** $\frac{2\pi-5}{8}$ **(D)** $\frac{\pi-1}{16}$ **(E)** $\frac{2\pi-3}{16}$.

5. Una lumaca si arrampica su una colonna cilindrica alta 8 metri, la cui circonferenza di base è lunga 3 metri. Sapendo che partendo dalla base raggiunge la cima facendo due giri intorno alla colonna e che, arrivata in cima, si trova esattamente sopra il punto da cui era partita, quanto è lunga la strada piú breve che la lumaca può aver percorso?
(A) 3π m **(B)** 10 m **(C)** $(8+\pi)$ m **(D)** 12 m **(E)** 4π m.

6. Sono dati quattro numeri naturali tali che, comunque se ne prendano tre distinti e si sommino, si ottiene un numero maggiore o uguale a 24. Quante delle seguenti affermazioni sono sicuramente vere?
I – ciascuno dei quattro numeri è maggiore o uguale a 8;
II – due dei numeri dati hanno somma maggiore o uguale a 16;
III– due dei numeri dati hanno prodotto maggiore o uguale a 64;
IV – il prodotto di due qualsiasi dei numeri è sempre maggiore o uguale a 32.
(A) Nessuna **(B)** una **(C)** due **(D)** tre **(E)** quattro.

7. Per quali numeri naturali n il prodotto
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
è un numero intero?
(A) Per n dispari **(B)** per n pari **(C)** per n multiplo di 3 **(D)** per ogni n
(E) per nessun n.

8. Determinare il più piccolo intero n con la seguente proprietà: dati comunque n interi $a_1, \ldots, a_n$, ne esistono due distinti tali che la loro somma o la loro differenza è divisibile per 10.
(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7 **(E)** 8.

9. Siano dati 13 numeri reali a_1, a_2, ..., a_{13}, tutti diversi da zero, di cui almeno tre positivi, e sia n il numero di a_i negativi. Sapendo che, tra tutti i possibili prodotti $a_i\,a_j$, esattamente 22 risultano negativi, quanto vale n? ($a_i\,a_j$ e $a_j\,a_i$ contano come un solo prodotto).
(A) 2 **(B)** 10 **(C)** 7 **(D)** 8 **(E)** i dati del problema non permettono di determinare n.

10. Una lampada, che si suppone puntiforme, è collocata in un punto V. Essa proietta su un piano a situato a 2 metri da V un fascio di luce avente la forma di cono circolare con asse perpendicolare ad a, le cui generatrici formano un angolo di 30° con l'asse del cono. Sul piano a, al centro della base del cono, viene posto un cubo di cartone, con lo spigolo di 1 metro. Si chiede quale sia l'area complessivamente illuminata dalla lampada (sul piano a e sulla faccia superiore del cubo), espressa in m^2.
(A) $\dfrac{2}{\sqrt{3}} - \dfrac{\pi}{9}$ **(B)** $4\dfrac{\pi}{3} - 3$ **(C)** $\dfrac{\pi}{9} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **(D)** $\pi - \sqrt{3}$ **(E)** $\dfrac{4\pi}{9} - \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Problemi a risposta numerica – 8 punti

11. All'interno dell'esagono regolare $ABCDEF$ si disegni il quadrato $ABGH$. Quanto vale l'ampiezza di $E\widehat{H}F$ espressa in gradi?

12. Due candele hanno la stessa lunghezza. La prima si consuma in 5 ore, la seconda in 3 ore. Le candele vengono accese contemporaneamente. Dopo quanti minuti l'altezza della prima candela sarà uguale a 3 volte l'altezza della seconda?

13. Secondo una recente statistica, in Italia una persona ogni 76 è allergica alle fragole e, tra quelli che lo sono, 2 su 3 sono donne. Sulla base di queste informazioni, e supponendo che in Italia il numero di donne sia uguale a quello degli uomini, si può concludere che è allergico alle fragole un uomo ogni X uomini. Determinare X.

14. Quante sono le coppie di interi positivi (x, y) che verificano l'equazione

$$x^2 + y^2 - 2004x - 2004y + 2xy - 2005 = 0?$$

Nota: se $x \neq y$, le coppie (x, y) e (y, x) sono da considerarsi diverse.

15. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**
Dimostrare che ogni numero intero n può essere scritto nella forma $n = a^2 + b^2 - c^2$, dove a, b e c sono opportuni numeri interi.

SOLUZIONE

UNIONE MATEMATICA ITALIANA
SCUOLA NORMALE SUPERIORE DI PISA

Progetto Olimpiadi di Matematica 2004

GARA di SECONDO LIVELLO TRIENNIO

19 febbraio 2004

1) Non sfogliare questo fascicoletto finché l'insegnante non ti dice di farlo. NON È AMMESSO L'UTILIZZO DI CALCOLATRICI TASCABILI
2) La prova consiste di 17 problemi divisi in 3 gruppi.
3) Nei problemi dal numero 1 al numero 10 sono proposte 5 risposte possibili, indicate con le lettere **A, B, C, D, E**. **Una sola** delle risposte è corretta. La lettera corrispondente alla risposta corretta dovrà essere riportata, per ogni quesito, in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 5 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
4) I problemi dal numero 11 al numero 15 richiedono una risposta che è data da un numero intero. Questo numero intero va indicato in fondo a questa pagina nella relativa finestrella. Ogni risposta **giusta vale 8 punti**, ogni risposta **errata vale 0 punti** e ogni problema lasciato **senza risposta vale 1 punto**. Non sono ammesse correzioni o cancellature sulla griglia.
5) Gli ultimi due problemi richiedono invece una dimostrazione. Ti invitiamo a formulare la soluzione in modo chiaro e conciso usufruendo dello spazio riservato e consegnando soltanto i fogli di questo fascicoletto. Ciascuno di questi problemi verrà valutato con un punteggio **da 0 a 15**.
6) Quando l'insegnante dà il via, comincia a lavorare. Hai **3 ore** di tempo. Buon lavoro!

Da riempirsi da parte dello studente

NOME:________________ COGNOME:________________

Indirizzo:________________ Città:________________

SCUOLA:________________ CLASSE:______ Città:________________

Risposte ai primi 15 quesiti

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

PUNTEGGIO (da riempirsi a cura dell'insegnante)

numero delle risposte esatte (1–10)		×5 =	
numero delle risposte esatte (11–15)		×8 =	
numero degli esercizi senza risposta		×1 =	
valutazione esercizio n.16			
valutazione esercizio n.17			
PUNTEGGIO TOTALE			

Si ringrazia per la collaborazione
AGIPPETROLI
Visitate il sito internet delle olimpiadi: `http://olimpiadi.ing.unipi.it`

Problemi a risposta multipla – 5 punti

1. Sia B un punto interno al segmento AC con AB di lunghezza 2 e BC di lunghezza 3. Costruiti i triangoli equilateri ABA' e CBC', dalla stessa parte rispetto al segmento AC, quanto misura l'area del triangolo $A'BC'$?
(A) $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ **(B)** 3 **(C)** $3\sqrt{3}$ **(D)** 5 **(E)** $\frac{25}{8}\sqrt{3}$.

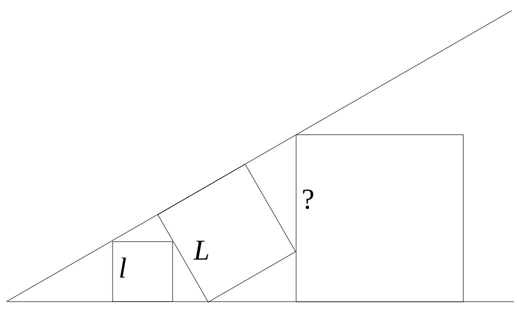
2. Il professor Bianchi non dice mai bugie, tranne un giorno della settimana (sempre lo stesso) in cui mente sempre. Quanti sono i giorni della settimana in cui può aver affermato: *"se non ho detto bugie ieri ne dirò certamente domani"*?
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3 **(E)** 4.

3. Quante soluzioni intere non negative ha l'equazione
$$v^2 + w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = 5\,?$$
Per *soluzione intera non negativa* si intende una cinquina ordinata di interi non negativi (v, w, x, y, z) che soddisfano l'equazione.
Nota: due cinquine ordinate che differiscono anche solo per l'ordine degli elementi (ad esempio, la cinquina (1,2,3,4,5) e la cinquina (3,1,2,4,5)) sono da considerarsi distinte.
(A) 1 **(B)** 20 **(C)** 21 **(D)** 65 **(E)** 121.

4. Quanto vale la somma
$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}?$$
(A) 9 **(B)** $\sqrt{101} - 1$ **(C)** $2\sqrt{\frac{101}{2}}$ **(D)** 10 **(E)** nessuna delle precedenti.

5. Da un sacchetto della tombola, contenente i numeri da 1 a 90, estraiamo contemporaneamente due numeri. Qual è la probabilità che la somma faccia 56?
(A) $\frac{3}{445}$ **(B)** $\frac{14}{2025}$ **(C)** $\frac{1}{150}$ **(D)** $\frac{11}{1620}$ **(E)** $\frac{11}{1602}$.

6. Tre quadrati sono disposti come in figura:



Se l e L sono i lati dei primi due quadrati da sinistra, quanto vale il lato del quadrato più grande?
(A) $l + L$ **(B)** $\frac{l+2L}{2}$ **(C)** $\frac{L^2}{l}$ **(D)** $\sqrt{2}\frac{L^2}{l}$
(E) non si può rispondere univocamente basandosi solo sui dati forniti

7. Alberto e Barbara stanno salendo con una seggiovia. Alberto occupa il sedile n. 48 e Barbara il sedile n. 180. Nell'istante in cui Alberto incrocia il sedile n. 75 Barbara incrocia il sedile n. 169. Quanti sedili ci sono sulla seggiovia?
Si supponga che i sedili siano ugualmente distanziati e che procedano in ordine crescente da 1 a N, dove N è il numero complessivo dei sedili. In particolare dopo il sedile numero N si trova il sedile numero 1.
(A) 226 **(B)** 228 **(C)** 236 **(D)** 244 **(E)** nessuna delle precedenti.

8. Determinare il più piccolo intero n con la seguente proprietà: dati comunque n interi $a_1, \ldots, a_n$, ne esistono due distinti tali che la loro somma o la loro differenza è divisibile per 9.
(A) 3 **(B)** 4 **(C)** 5 **(D)** 6 **(E)** 7.

9. Calcolare l'area dell'intersezione di tre cerchi aventi come rispettivi diametri i tre lati di un triangolo equilatero di lato unitario.
(A) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3}$ **(B)** $\frac{\pi-3}{2}$ **(C)** $\pi-3$ **(D)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{4}$ **(E)** $\frac{\pi-\sqrt{3}}{8}$.

10. Per quanti valori interi di a l'equazione

$$x^3 + (a-4)x^2 + (a+4)x + 9 = 0$$

ha esattamente due soluzioni intere distinte?

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 3 **(D)** 4 **(E)** più di 4.

Problemi a risposta numerica – 8 punti

11. Quante sono le coppie di interi positivi (x, y) che verificano l'equazione

$$x^2 + y^2 - 2004x - 2004y + 2xy - 2005 = 0?$$

Nota: se $x \neq y$, le coppie (x, y) e (y, x) sono da considerarsi distinte.

12. Due candele hanno la stessa lunghezza. La prima si consuma in 5 ore, la seconda in 3 ore. Le candele vengono accese contemporaneamente. Dopo quanti minuti l'altezza della prima candela sarà uguale a 3 volte l'altezza della seconda?

13. Un villaggio è costituito da abitazioni isolate, collegate da strade. Ognuna di queste strade è un sentiero che collega due abitazioni (e tra due abitazioni vi è al più un sentiero che le collega). Le abitazioni sono di due tipi: centrali e periferiche. Ogni abitazione centrale è collegata esattamente ad altre tre abitazioni; ogni abitazione periferica è collegata esattamente ad altre due abitazioni. Sapendo che il numero di abitazioni centrali è uguale al numero di abitazioni periferiche, e che ci sono in tutto 30 sentieri, quante abitazioni ci sono in tutto il villaggio?

14. Il professor Abacus ha scritto sulla lavagna due numeri naturali, risultato di parecchie ore di lavoro. Il figlio dispettoso cancella i due numeri e li sostituisce con il loro prodotto meno 1 e la loro somma. Non soddisfatto cancella anche questi e li sostituisce di nuovo con il loro prodotto meno 1 e la loro somma. Infine ci pensa un po', li cancella e scrive al loro posto la loro somma, cioè 1309. Quanto valeva la somma dei numeri di partenza?

15. Un cubetto di sughero di spigolo 10 ha un peso attaccato ad un vertice e galleggia in un secchio d'acqua in modo che una diagonale del cubetto sia in posizione verticale. Quanto misura, in cm^2, la superficie del cubetto a contatto con l'acqua, sapendo che il volume immerso è pari a 5 volte il volume emerso?

16. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Trovare tutte le coppie (p, q) di numeri primi (positivi) tali che l'equazione

$$x^2 - (6p - 4q)x + 3pq = 0$$

abbia due radici intere.

SOLUZIONE

17. **ESERCIZIO DIMOSTRATIVO**

Sia $ABCD$ un rombo, ed E un punto qualunque sulla sua diagonale AC. Sia F il punto sul segmento BC tale che $BF = DE$. Provare che

$$(AB + BF) \cdot FC = AE \cdot EC \,.$$

SOLUZIONE