PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- Soluzioni biennio

22 novembre 2011

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	A
2	B
3	B
4	E
5	C
6	E
7	E
8	C
9	D
10	A

Problema	Risposta corretta
11	C
12	D
13	A
14	B
15	C
16	B
17	C
18	D
19	D
20	E

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(A)**.
   Un numero multiplo di $1, 2, 3, 4, 5, 6$ deve essere necessariamente multiplo di 10, e quindi deve avere 0 come cifra delle unità.
   [Problema proposto da X.Y. Lu.]

2. La risposta è **(B)**.
   Dai cambi fatti da Cangrande risulta che:

   $$2 \text{ Baiocchi} = 3 \text{ Dobloni}, \quad 2 \text{ Dobloni} = 1 \text{ Baiocco} + 3 \text{ Carlini}.$$

   Se moltiplichiamo la prima uguaglianza per 2 e la seconda per 3 abbiamo

   $$4 \text{ Baiocchi} = 6 \text{ Dobloni}, \quad 6 \text{ Dobloni} = 3 \text{ Baiocchi} + 9 \text{ Carlini}.$$

   Dunque 4 Baiocchi valgono quanto 3 Baiocchi e 9 Carlini, ovvero un Baiocco vale 9 Carlini.
   [Problema proposto da F. Mugelli.]

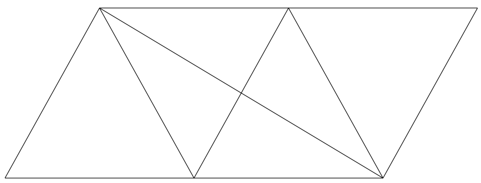
3. La risposta è **(B)**.
   Ciascuno dei tre rettangoli ha area doppia rispetto al triangolo ABC, quindi i tre rettangoli hanno la stessa area.
   [Problema proposto da K. Kuzmin.]

4. La risposta è **(E)**.
   Osserviamo che X e V devono avere lo stesso segno, perché il loro prodotto è positivo. Inoltre

i divisori di 15 sono: 1, 3, 5 e 15. Quindi le possibili coppie sono: $(1, 15)$, $(3, 5)$, $(5, 3)$, $(15, 1)$ e le quattro coppie che si ottengono da queste cambiando di segno sia a X che a V: $(-1, -15)$, $(-3, -5)$, $(-5, -3)$, $(-15, -1)$.
[Problema proposto da G. Paolini.]

5. La risposta è **(C)**.
Osserviamo che, fissati due dei tre numeri su una faccia triangolare, il terzo è determinato dalla richiesta che la somma sia divisibile per tre (se la somma dei due numeri già fissati lascia resto r nella divisione per 3, allora il terzo numero deve lasciare resto $3 - r$). Chiamiamo allora x il numero sulla punta della piramide e a, b due numeri su due vertici consecutivi della base. Una faccia laterale adiacente a quella etichettata a, b, x ha due vertici su cui sono scritti b e x, e quindi sul suo terzo vertice c'è scritto a. Similmente, sul quarto vertice di base c'è scritto b, quindi la somma dei numeri sulla base è $2(a + b)$. Affinché quest'ultimo numero sia divisibile per 3, dev'essere o $a = 1, b = 2$ (o simmetricamente $a = 2, b = 1$), oppure $a = b = 3$. L'ultimo caso è escluso (infatti si avrebbe anche $x = 3$ contro l'ipotesi che non tutti i numeri siano uguali a 3), e quindi si ha che $x = 3$ e la somma dei numeri sulla base è $2(a + b) = 6$. La risposta è quindi 9.
[Problema proposto da D. Lombardo.]

6. La risposta è **(E)**.
Facendo riferimento alla figura, il parallelogramma è formato da quattro triangoli equilateri congruenti tra loro. Quindi ciascuno di loro ha area $\frac{1}{4}\,\mathrm{m}^2$. Da questo si può risalire al lato di ciascuno di questi triangoli, che è $\frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ m, e quindi all'altezza che è $\frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ m. Infine, notiamo che la misura della diagonale minore del parallelogramma coincide con il doppio della misura dell'altezza di uno dei triangoli equilateri, ovvero è uguale a $\sqrt[4]{3}$ m.



[Problema proposto da G. Paolini.]

7. La risposta è **(E)**.
In generale, se P ed S indicano rispettivamente il numero di primi e di secondi in una cena, e tutti gli abbinamenti sono consentiti, il numero di possibili pasti (cioè una scelta di un primo e di un secondo) è il prodotto $P\,S$. Se indichiamo allora con P e S il numero di primi e di secondi della cena dello scorso anno, abbiamo $P\,S = 60$. Sia Q il numero di primi aggiunti quest'anno; ragionando come prima troviamo $(P + Q)\,S = 68$. D'altra parte $(P + Q)\,S = P\,Q + S\,Q = 60 + S\,Q$, dunque $S\,Q = 8$. S e Q sono due numeri naturali, quindi possiamo avere: $S = 8$ e $Q = 1$, ma questa scelta non è ammissibile perchè S deve dividere 60; $S = 4$ e $Q = 2$, da cui si ha $P = 15$; $S = 2$ e $Q = 4$, da cui si ha $P = 30$; $S = 1$ e $Q = 8$, da cui si ha $P = 60$. Il minimo valore che P può avere è 15.
[Problema proposto da G. Paolini.]

8. La risposta è **(C)**.
Supponiamo che uno dei numeri scritti da Filippo sia X, e calcoliamo il numero successivo, seguendo le operazioni che Filippo esegue:

$$X \to \frac{X}{2} \to \left(\frac{X}{2} + 2\right) \to 2\left(\frac{X}{2} + 2\right) \to 2\left(\frac{X}{2} + 2\right) - 2 = X + 2\,.$$

Quindi, per passare da un numero X al successivo, Filippo somma semplicemente 2 a X. La sequenza di numeri che scrive è allora: 2, 4, 6, 8, ..., ovvero la sequenza dei numeri pari. Il primo numero pari di quattro cifre è 1000, che è il cinquecentesimo numero scritto da Filippo. [Problema proposto da L. Ghidelli.]

9. La risposta è **(D)**.
In un parallelogramma le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà, quindi G è il punto medio di AF e di DE (perché queste sono le diagonali del parallelogramma $AEFD$) e similmente H è il punto medio di EC e di BF; siccome ha i lati opposti a due a due uguali, $GEHF$ è un parallelogramma. L'area di $GEHF$ è perciò la metà di quella di $EBFD$ (hanno la stessa altezza, pensando come base i lati HF e BF, e la base del primo è la metà di quella del secondo); infine, l'area di $EBFD$ può essere calcolata prendendo come base EB (che è lunga $\frac{5}{2}$ cm) ed altezza BD (che è lunga 2 cm). L'area di $GEHF$ è quindi
$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\,\mathrm{cm} \cdot 2\,\mathrm{cm} = \frac{5}{2}\,\mathrm{cm}^2$$
[Problema proposto da D. Lombardo.]

10. La risposta è **(A)**.
Un generico numero palindromo di 5 cifre può essere scritto nella forma *abcba*, dove a, essendo la prima cifra, appartiene a $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, mentre b e c variano in $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. La somma delle sue cifre è data da $2a + 2b + c$ e quindi affinché questa sia pari, c deve essere pari, oppure uguale a zero. I numeri con le proprietà richieste sono allora quelli della forma *abcba* con: $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ e $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Quindi abbiamo nove possibilità di scelta per a, dieci per b e cinque per c, ovvero $9 \times 10 \times 5 = 450$ possibilità in tutto.
[Problema proposto da M. Carbone.]

11. La risposta è **(C)**.
Affinché l'ultimo numero sia 0 è necessario che i due che lo precedono siano di segno opposto (li chiamiamo x e $-x$) oppure entrambi 0, ma questo è impossibile perché allora tutti i numeri precedenti sarebbero nulli, contravvenendo al testo del problema. Si può dunque costruire, procedendo a ritroso, l'intera successione di numeri dal decimo sino al primo: $0, x, -x, 2x, -3x, 5x, -8x, 13x, -21x, 34x$. Allora $x = 1$ ed è sufficiente sommare i dieci numeri per ottenere la soluzione: 22.
[Problema proposto da M. Carbone.]

12. La risposta è **(D)**.
I centri delle monete 1, 4, 2, così come quelli delle monete 2, 3, 5, formano dei triangoli equilateri di lato 2 cm, il doppio del raggio delle monete, con i lati concorrenti nel centro della moneta 2 allineati. Allora i centri delle monete 1, 4, 3, 5 formano un rettangolo, di cui i lati dei triangoli equilateri considerati sono lato minore e metà delle diagonali. Il lato maggiore è allora due volte l'altezza di tali triangoli; il rettangolo ha allora le misure di $(2\sqrt{3}$ cm$) \times (2$ cm$)$. Il quadrilatero che racchiude le monete è perciò un rettangolo concentrico al primo con i lati più lunghi di 2 cm, il doppio della misura del raggio delle monete; le sue misure sono $((2\sqrt{3}+2)$ cm$) \times (4$ cm$)$ e l'area è allora $(8\sqrt{3} + 8)\,\mathrm{cm}^2$.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]

13. La risposta è **(A)**.
Supponiamo che Andrea dica la verità, allora Gabriele è il capitano e dunque anche Paolo dice la verità, e questo non può accadere. Dunque Andrea mente, ma allora Gabriele non è il

capitano e dunque Gabriele dice la verità. Allora anche Paolo mente (e dunque in particolare Paolo è il capitano).
[Problema proposto da F. Mugelli.]

14. La risposta è **(B)**.
Dall'uguaglianza contenuta nel problema si ricava:
$$a^3 - 3a^2b = b^3 - 3ab^2 \Rightarrow a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = 0 \Rightarrow (a-b)^3 = 0\,.$$
Dunque $a = b$ e quindi il rapporto tra a e b può assumere un solo valore, cioè 1.
[Problema proposto da G. Paolini.]

15. La risposta è **(C)**.
L'ultima cifra del quadrato di un numero dipende solo dall'ultima cifra del numero stesso; dal momento che $0^2 = 0, 2^2 = 4, 4^2 = 16, 6^2 = 36$ e $8^2 = 64$, il quadrato di un numero pari può finire solo con $0, 4, 6$. Al primo passaggio, quindi, Marta scriverà un numero che finisce con $5, 9$ oppure 1 (le possibili ultime cifre che si ottengono sommando 5 a numeri che terminano con $0, 4$ o 6). I quadrati di numeri che finiscono con $5, 9$ o 1 finiscono con 5 o con 1, quindi al secondo passaggio il numero scritto finirà con 0 o con 6. Allo stesso modo si vede che, dopo due passaggi, numeri che terminano con 0 o 6 si sono trasformati in numeri che terminano, rispettivamente, ancora con 0 oppure 6. Siccome il numero totale di passaggi è pari, anche il numero finale avrà come ultima cifra 0 oppure 6 (ed entrambe queste possibilità si possono verificare, perché ogni due passaggi si ripresenta la stessa cifra finale, se all'inizio questa è 0 o 6)
[Problema proposto da D. Lombardo.]

16. La risposta è **(B)**.
Osserviamo che le caselle nere contenute nelle colonne dispari e le caselle nere contenute nelle righe dispari sono le stesse. Indichiamo con N la somma dei numeri scritti su queste caselle. Inoltre ogni casella bianca sta in una colonna dispari, oppure in una riga dispari. Siano: B_1 la somma dei i numeri scritti sulle caselle bianche che stanno nelle colonne dispari, e B_2 la somma dei numeri scritti sulle caselle bianche che stanno nelle righe dispari. Dunque $B_1 + B_2 = 28$. Inoltre abbiamo $N + B_1 = 47$. Il numero a cui siamo interessati è $N + (-B_2) = N - B_2 = N - (28 - B_1) = N + B_1 - 28 = 47 - 28 = 19$.
[Problema proposto da G. Paolini.]

17. La risposta è **(C)**.
Notiamo che, comunque si scelgano 7 vertici sulla griglia, ve ne sono almeno 3 dello stesso colore, ma affinché questo sia vero non è sufficiente sceglierne 6. Cerchiamo allora il cerchio di raggio minimo, centrato nel vertice centrale della griglia, che contenga almeno 7 vertici. Il cerchio di raggio 1 cm contiene 5 vertici e lo stesso è vero se il raggio è maggiore o uguale a 1 cm ma strettamente minore di $\sqrt{2}$ cm. Il cerchio di raggio $\sqrt{2}$ cm contiene esattamente 9 vertici della griglia, e quindi è il cerchio da noi cercato.
[Problema proposto da S. Di Trani.]

18. La risposta è **(D)**.
Sia ABC il triangolo, con cateti AB e AC e supponiamo $\overline{AC} = 40$ cm; indichiamo con x la lunghezza da AB. Sia inoltre O il centro del centro inscritto. L'area a (espressa in cm^2) del triangolo può essere allora scritta come $a = \frac{40x}{2}\,\text{cm}^2$. D'altra parte l'area può essere calcolata come somma delle aree dei triangoli ABO, BCO e ACO, ciascuno avente base uno dei lati del

triangolo e altezza pari al raggio del cerchio inscritto, ovvero 10 cm. Quindi:

$$a = 10\left(\frac{40}{2} + \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{1600 + x^2}}{2}\right)\ \mathrm{cm}^2\,,$$

dove si è usato il teorema di Pitagora per scrivere la lunghezza dell'ipotenusa di ABC. Uguagliando tra loro le due espressioni di a otteniamo: $10(40 + x + \sqrt{1600 + x^2}) = 40x$ da cui segue, con facili conti, $8x^2 - 240x = 0$. L'unica soluzione positiva di questa equazione è $x = 30$. Dunque il cateto AB misura 30 cm e l'ipotenusa misura 50 cm.
[Problema proposto da S. Di Trani.]

19. La risposta è **(D)**.
Scriviamo i primi termini della successione: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = -1$, $a_4 = -1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 1$, $a_7 = 1$, $a_8 = 0$; si nota che $a_1 = a_7$ e $a_2 = a_8$ e quindi i termini successivi si ripetono, ovvero i termini dal settimo al dodicesimo coincidono con i primi sei (nello stesso ordine). Chiaramente questro fenomeno si ripete: i termini dal diciannovesimo al ventiquattresimo coincidono con i primi sei, e ne rispettano l'ordine, e così via. In conclusione la sequenza è periodica di periodo sei, ovvero i suoi termini si ripetono di sei in sei. Poiché 2011 diviso sei da resto 1, il termine a_{2011} coincide con a_1 e quindi è uguale a 1.
[Problema proposto da S. Di Trani.]

20. La risposta è **(E)**.
È evidente che il re, in cinque passi, non può allontanarsi dalla casella di partenza di più di cinque colonne o cinque righe. Le caselle raggiungibili sono perciò, al più, quelle appartenenti ad una scacchiera 11×11 privata del centro, ossia 120. Proviamo ora che ognuna di queste caselle è effettivamente raggiungibile in 5 passi, suddividendo la scacchiera 11×11 in "cornici" concentriche rispetto alla casella centrale: la quinta cornice è costituita dalle 40 caselle perimetrali, la quarta cornice è costituita dalle caselle perimetrali della scacchiera privata della quinta cornice e così via; la prima cornice è costituita dalle 8 caselle adiacenti alla casella di partenza. È chiaramente possibile raggiungere ogni casella sulla quinta cornice in cinque passi, e ogni casella sulla k-esima cornice (con $k < 5$) compiendo k passi di cornice in cornice e $5 - k$ passi in senso orario sulla k-esima cornice. Questo prova che la risposta corretta è 120.
[Problema proposto da M. Carbone.]

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- Soluzioni triennio

22 novembre 2011

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	A
2	B
3	C
4	B
5	E
6	D
7	A
8	C
9	D
10	A
11	B
12	E
13	C

Problema	Risposta corretta
14	B
15	C
16	D
17	A
18	C
19	C
20	E
21	B
22	C
23	C
24	A
25	E

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(A)**.
Un numero multiplo di $1, 2, 3, 4, 5, 6$ deve essere necessariamente multiplo di 10, e quindi deve avere 0 come cifra delle unità.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

2. La risposta è **(B)**.
Ciascuno dei tre rettangoli ha area doppia rispetto al triangolo ABC, quindi i tre rettangoli hanno la stessa area.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]

3. La risposta è **(C)**.
Osserviamo che, fissati due dei tre numeri su una faccia triangolare, il terzo è determinato dalla richiesta che la somma sia divisibile per tre (se la somma dei due numeri già fissati lascia resto r nella divisione per 3, allora il terzo numero deve lasciare resto $3 - r$). Chiamiamo allora x il numero sulla punta della piramide e a, b due numeri scritti su due vertici consecutivi della base. Una faccia laterale adiacente a quella etichettata a, b, x ha due vertici su cui sono scritti b e x, e quindi sul suo terzo vertice c'è scritto a. Similmente, sul successivo vertice di base c'è scritto b, sul successivo a, e così via. Degli otto vertici della base, su quattro è scritto a e sugli altri quattro è scritto b. Quindi la somma dei numeri sulla base è $4(a + b)$. Affinché quest'ultimo

numero sia divisibile per 3, dev'essere o $a = 1, b = 2$ (o simmetricamente $a = 2, b = 1$), oppure $a = b = 3$. L'ultimo caso è escluso (infatti si avrebbe anche $x = 3$ contro l'ipotesi che non tutti i numeri siano uguali a 3), e quindi si ha che $x = 3$ e la somma dei numeri sulla base è $4(a + b) = 12$. La risposta è quindi 15.
[Problema proposto da D. Lombardo.]

4. La risposta è **(B)**.
Dalla prima uguaglianza ricaviamo $m = 7 + n$, quindi $m + 5n = 7 + 6n$, e n è un numero intero positivo. In particolare $7 + 6n$ è maggiore di zero per ogni n. La limitazione $7 + 6n \leq 2011$ diventa $6n \leq 2004$ cioè $n \leq 334$. Quindi n può assumere 334 valori distinti, e di conseguenza lo stesso vale per $m + 5n = 7 + n$.
[Problema proposto da G. Paolini.]

5. La risposta è **(E)**.
In generale, se P ed S indicano rispettivamente il numero di primi e di secondi in una cena, e tutti gli abbinamenti sono consentiti, il numero di possibili pasti (cioè una scelta di un primo e di un secondo) è il prodotto $P\,S$. Se indichiamo allora con P e S il numero di primi e di secondi della cena dello scorso anno, abbiamo $P\,S = 60$. Sia Q il numero di primi aggiunti quest'anno; ragionando come prima troviamo $(P + Q)\,S = 68$. D'altra parte $(P + Q)\,S = P\,Q + S\,Q = 60 + S\,Q$, dunque $S\,Q = 8$. S e Q sono due numeri naturali, quindi possiamo avere: $S = 8$ e $Q = 1$, ma questa scelta non è ammissibile perchè S divide 60; $S = 4$ e $Q = 2$, da cui si ha $P = 15$; $S = 2$ e $Q = 4$, da cui si ha $P = 30$; $S = 1$ e $Q = 8$, da cui si ha $P = 60$. Il minimo valore che P può avere è 15.
[Problema proposto da G. Paolini.]

6. La risposta è **(D)**.
In un parallelogramma le diagonali si tagliano vicendevolmente a metà, quindi G è il punto medio di AF e di DE (perché queste sono le diagonali del parallelogramma $AEFD$) e similmente H è il punto medio di EC e BF; siccome ha i lati opposti a due a due uguali, $GEHF$ è un parallelogramma. L'area di $GEHF$ è perciò la metà di quella di $EBFD$ (hanno la stessa altezza, pensando come base i lati HF e BF, e la base del primo è la metà di quella del secondo); infine, l'area di $EBFD$ può essere calcolata prendendo come base EB (che è lunga $\frac{5}{2}$ cm) ed altezza BD (che è lunga 2 cm). L'area di $GEHF$ è quindi

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2}\,\mathrm{cm} \cdot 2\,\mathrm{cm} = \frac{5}{2}\,\mathrm{cm}^2$$

[Problema proposto da D. Lombardo.]

7. La risposta è **(A)**.
Un generico numero palindromo di 5 cifre può essere scritto nella forma *abcba*, dove a, essendo la prima cifra, appartiene a $\{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, mentre b e c variano in $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$. La somma delle sue cifre è data da $2a + 2b + c$ e quindi affinchè questa sia pari, c deve essere pari, oppure uguale a zero. I numeri con le proprietà richieste sono allora quelli della forma *abcba* con: $a \in \{1, 2, 3, \ldots, 9\}$, $b \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ e $c \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$. Quindi abbiamo nove possibilità di scelta per a, dieci per b e cinque per c, ovvero $9 \times 10 \times 5 = 450$ possibilità in tutto.
[Problema proposto da M. Carbone.]

8. La risposta è **(C)**.
Affinché l'ultimo numero sia 0 è necessario che i due che lo precedono siano di segno opposto (li chiamiamo x e $-x$) oppure entrambi 0, ma questo è impossibile perché allora tutti i numeri

precedenti sarebbero nulli, contravvenendo al testo del problema. Si può dunque costruire, procedendo a ritroso, l'intera successione di numeri dal decimo sino al primo: $0, x, -x, 2x, -3x, 5x, -8x, 13x, -21x, 34x$. Allora $x = 1$ ed è sufficiente sommare i dieci numeri per ottenere la soluzione: 22.
[Problema proposto da M. Carbone.]

9. La risposta è **(D)**.
Indichiamo con n il numero (incognito) dei lati e con S la somma delle ampiezze gli angoli interni. Sappiamo che $\frac{S}{n} = 175°$. D'altra parte la somma degli angoli interni di un poligono di n lati è pari a $(n-2)\,180°$. Dunque $n\,175° = (n-2)\,180°$, da cui si ricava facilmente $n = 72$.
[Problema proposto da G. Paolini.]

10. La risposta è **(A)**.
Le uguaglianze sono equivalenti al sistema $(a-b)x = c-b$, $(b-c)x = a-c$, $(c-a)x = b-a$, da cui, essendo i numeri tutti diversi tra loro, e quindi essendo possibile dividere per i coefficienti della x nelle rispettive equazioni, si ha $x = \frac{c-b}{a-b} = \frac{a-c}{b-c} = \frac{b-a}{c-a}$. Moltiplicando i 3 valori della x così ottenuti si ottiene $x^3 = -1$, quindi l'unico valore possibile per x è -1. Tuttavia sostituendolo nell'equazione iniziale si ottiene $b - a = c - b = a - c$; le tre differenze non possono essere 0 per ipotesi; se fossero positive si avrebbe $b > a > c > b$, assurdo; se fossero negative si avrebbe $b < a < c < b$, assurdo.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]

11. La risposta è **(B)**.
Poichè tra un salto del canguro e il successivo, il numero dei salti della rana aumenta di uno, e i salti della rana sono da un vertice al successivo, il primo salto del canguro è di un vertice, il secondo di due, il terzo di tre, e così via. Quindi dopo n salti, il vertice su cui si trova segue (in senso antiorario) quello di partenza di un numero di vertici pari a
$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Quindi, se dopo n salti è tornato nel vertice di partenza, $n(n+1)$ deve essere un multiplo di 41, che è un numero primo. Quindi 41 divide n oppure $(n+1)$. Se $n \leq 40$ l'unica possibilità è $n = 40$ e quindi $n+1 = 41$. Quindi la prima volta che il canguro ritorna nel vertice di partenza è al quarantesimo salto.
[Problema proposto da G. Paolini.]

12. La risposta è **(E)**.
Consideriamo le coppie formate da 1 ed un numero primo p. Queste sono tutte belle: gli unici casi in cui $1 \cdot p = a \cdot b$, infatti, sono quelli in cui $a = 1, b = p$ oppure $a = p, b = 1$, per cui in ogni caso si ha $a + b = p + 1$. Le coppie belle sono quindi infinite (e perciò certamente più di otto).
[Problema proposto da D. Lombardo.]

13. La risposta è **(C)**.
L'ultima cifra del quadrato di un numero dipende solo dall'ultima cifra del numero stesso; dal momento che $0^2 = 0, 2^2 = 4, 4^2 = 16, 6^2 = 36$ e $8^2 = 64$, il quadrato di un numero pari può finire solo con $0, 4, 6$. Al primo passaggio, quindi, Marta scriverà un numero che finisce con $5, 9$ oppure 1 (le possibili ultime cifre che si ottengono sommando 5 a numeri che terminano con $0, 4$ o 6). I quadrati di numeri che finiscono con $5, 9$ o 1 finiscono con 5 o con 1, quindi al secondo passaggio il numero scritto finirà con 0 o con 6. Allo stesso modo si vede che, dopo due passaggi, numeri che terminano con 0 o 6 si sono trasformati in numeri che terminano,

rispettivamente, ancora con 0 oppure 6. Siccome il numero totale di passaggi è pari, anche il numero finale avrà come ultima cifra 0 oppure 6 (ed entrambe queste possibilità si possono verificare, perché ogni due passaggi si ripresenta la stessa cifra finale, se all'inizio questa è 0 o 6).
[Problema proposto da D. Lombardo.]

14. La risposta è **(B)**.
Osserviamo che le caselle nere contenute nelle colonne dispari e le caselle nere contenute nelle righe dispari sono le stesse. Indichiamo con N la somma dei numeri scritti su queste caselle. Inoltre ogni casella bianca sta in una colonna dispari, oppure in una riga dispari. Siano: B_1 la somma dei i numeri scritti sulle caselle bianche che stanno nelle colonne dispari, e B_2 la somma dei numeri scritti sulle caselle bianche che stanno nelle righe dispari. Dunque $B_1 + B_2 = 28$. Inoltre abbiamo $N + B_1 = 47$. Il numero a cui siamo interessati è $N + (-B_2) = N - B_2 = N - (28 - B_1) = N + B_1 - 28 = 47 - 28 = 19$.
[Problema proposto da G. Paolini.]

15. La risposta è **(C)**.
Lorenzo mente sicuramente, se infatti dicesse il vero, stando alla sua dichiarazione Anna mentirebbe, ma direbbe anche il vero perché Erica mente. Inoltre, almeno uno tra Anna, Giuseppe ed Erica sicuramente mente e, più precisamente, si possono verificare solo le due seguenti situazioni: Anna mente, allora Giuseppe ed Erica dicono entrambi il vero, oppure Anna non mente, allora Giuseppe ed Erica mentono entrambi. Nel caso "peggiore" tra i primi tre ci sono due persone che dicono il falso. Dato che indipendentemente dalle dichiarazioni dei tre, Lorenzo dice sempre il falso, al massimo tre dei nostri eroi mentono sempre.
[Problema proposto da S. Di Trani.]

16. La risposta è **(D)**.
I triangoli ABC e ADE sono simili. Sia S il piede dell'altezza di ADE relativa a DE. Abbiamo che:

- $\overline{DE} : \overline{BC} = 6 : 10$ e quindi $\overline{DE} = \frac{3}{5}\overline{BC}$,
- $\overline{AS} : \overline{AH} = 6 : 10$ e quindi $\overline{HS} = \overline{AH} - \overline{AS} = \frac{2}{5}\overline{AH}$.

Allora l'area di DEH è $\frac{6}{25}\frac{\overline{BC}\cdot\overline{AH}}{2}$, ovvero l' area di ABC è $\frac{25}{6}$ dell'area di DEH.
[Problema proposto da S. Di Trani.]

17. La risposta è **(A)**.
In un'equazione di secondo grado del tipo $x^2 + mx + n = 0$, se α e β sono le soluzioni, si ha che $m = -(\alpha + \beta)$ e $n = \alpha\beta$. Nel nostro caso allora abbiamo che, se α e β sono le radici dell'equazione, allora $\frac{b}{a} = \alpha + \beta$ e $\frac{c}{a} = \alpha\beta$. Dato che $1 > \alpha$ e $1 > \beta$ abbiamo che $\frac{b}{a} < 2$ e che $\frac{c}{a} < 1$. Sommando e moltiplicando per a si ottiene che $b + c < 3a$. Osserviamo che se consideriamo l'equazione $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = 0$, abbiamo che $a = 4 > 1$ e l'equazione ha due soluzioni che coincidono e sono uguali a $1/2 < 1$. D'altra parte in questo esempio nessuna delle affermazioni contenute nelle risposte **(B)**, **(C)**, **(D)** ed **(E)** è vera.
[Problema proposto da S. Di Trani.]

18. La risposta è **(C)**.
Notiamo prima di tutto che ciascun vertice è appartenente a esattamente tre facce, adiacenti tra loro, che quindi andranno colorate con tre colori diversi, e quindi il colore del vertice sarà univocamente determinato (è il colore mancante). Ne segue che il numero di colorazioni di facce e vertici è uguale al numero di colorazioni delle sole facce con quattro colori. Preso un

vertice, le tre facce adiacenti a cui appartiene possono essere colorate in $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ modi (scelgo un colore per la prima faccia, poi uno diverso per la seconda, poi uno diverso per la terza). Per comodità chiameremo questi colori 1, 2 e 3, mentre quello escluso sarà chiamato 4. Le restanti tre facce saranno adiacenti tra di loro, e ciascuna adiacente a due delle tre facce già colorate. Prese le tre facce rimanenti, dovranno dunque ancora essere colorate con tre colori diversi, quindi separiamo due casi:

- Se il colore escluso è il 4, stiamo colorando le facce del cubo con solo tre colori. Presa dunque una faccia ho solo un colore disponibile per colorarla (è già a contatto con due facce colorate con colori diversi). Fatto ciò, troviamo sempre una faccia a contatto con due colori diversi, e la colorazione si completa univocamente. Fissate le prime tre facce abbiamo dunque una sola combinazione.
- Se il colore escluso non è il 4, possiamo scegliere in tre modi dove mettere quest'ultimo, e noteremo che in ogni caso le altre due facce sono determinate univocamente (sono a contatto con il 4 e due delle precedenti), quindi fissate le prime tre facce abbiamo 3 combinazioni.

Ricombinando i calcoli, le combinazioni possibili sono $24 \cdot (1 + 3) = 96$.
[Problema proposto da R. Morandin.]

19. La risposta è **(C)**.
Notiamo prima di tutto che $r \neq 2$ (in tal caso si dovrebbe avere $p = r = 1$, ma 1 non è primo!). Dunque r è un primo dispari, e di conseguenza uno tra p e q deve essere pari, in particolare deve essere 2, non essendoci altri primi pari. L'altro ovviamente dovrà essere dispari. Se per esempio fosse $p = 2$, si avrebbe $q^2 = r - 4$ e $r < 100 \Rightarrow q^2 = r - 4 < 96$, da cui $q \leq 9$.
Le possibilità per q sono solo $3, 5, 7$ per cui:

- Se $q = 3$ si avrebbe $r = 9 + 4 = 13$ che primo.
- Se $q = 5$ si avrebbe $r = 25 + 4 = 29$ che primo.
- Se $q = 7$ si avrebbe $r = 49 + 4 = 53$ che primo.

I casi con $q = 2$ sono analoghi (basta scambiare p e q) e, dato che non succede mai che $p = q$, non ci sono intersezioni e possiamo concludere che abbiamo 6 terne ordinate di primi che soddisfano la nostra equazione.
[Problema proposto da R. Morandin.]

20. La risposta è **(E)**.
Il quadrilatero $ABCD$ è formato da due triangoli rettangoli congruenti, ABC e ACD, i cui cateti misurano 20 cm e 30 cm rispettivamente. La sua area è quindi $600\,\text{cm}^2$. D'altra parte, indicata con R la misura (in centimetri) del raggio del cerchio inscritto e con O il suo centro, l'area di $ABCD$ può essere calcolata come la somma delle aree dei triangoli: AOB, BOC, COD e DOA, cioè $50\,R\,\text{cm}^2$. Uguagliando queste due espressioni dell'area di $ABCD$ si ottiene $R = 12$.
[Problema proposto da L. Ghidelli.]

21. La risposta è **(B)**.
Per ciascuno dei diciannove giocatori che sono stati eliminati, sono state disputate due partite, che egli ha perso. Quindi sono state disputate almeno 38 partite. Inoltre, poiché il vincitore non ha perso nessuna partita, le partite giocate sono esattamente 38.
[Problema proposto da L. Ghidelli.]

22. La risposta è **(C)**.
Poiché si richiede il valore di un rapporto tra 2 lunghezze, possiamo supporre che il quadrato abbia lato 1, in una qualche unità di misura. Chiamiamo P il punto medio di DC, r la retta lungo cui avviene la piegatura. Siano inoltre H e Q le intersezioni di r con BP e BC rispettivamente. Poiché si tratta di una piega, è necessario $PH = BH$. Per il Teorema di Pitagora
$$\overline{BP} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}, \qquad \overline{PH} = \frac{\sqrt{5}}{4}.$$
Poiché i triangoli BQH e BPC sono simili, abbiamo
$$\frac{\overline{BQ}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BC}},$$
e dunque
$$\overline{BQ} = \frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}\overline{BH} = 2\overline{BH}^2 = \frac{5}{8}$$
da cui $\overline{CQ} = \frac{3}{8}$ e $\frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} = \frac{5}{3}$.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

23. La risposta è **(C)**.
C afferma l'innocenza di D. Se davvero D fosse innocente, E sarebbe il colpevole e A un suo complice; ma questo non può essere, dato che E stesso fa il nome di A come complice della rapina. Dunque C mente affermando che D sia innocente; se la sua altra affermazione fosse veritiera E sarebbe il colpevole, e dunque A, non essendo un complice, dovrebbe essere innocente; ma ciò è in contraddizione con il fatto che A stia accusando B della rapina. Quindi C mente in entrambe le sue affermazioni, per cui è l'autore della rapina. B allora non è il colpevole, quindi A è un complice; le affermazioni di E si rivelano entrambe vere, dunque E è innocente; di conseguenza anche B è innocente; infine, D mente nell'accusare E, quindi i complici tra gli interrogati sono A e D.
[Problema proposto da D. Lombardo.]

24. La risposta è **(A)**.
Notiamo che, per ogni scelta di h, k con $h < k$, a_h divide a_k. In particolare, essendo $a_{333} = 1000 \cdot a_{332}$ e $a_3 = 10 \cdot a_2$, si ha che a_3 divide a_{332} e quindi a_{332} è multiplo di 10. Di conseguenza a_{333} è multiplo di 10000 e lo è anche a_{2011}, che finisce con 4 zeri.
[Problema proposto da R. Morandin.]

25. La risposta è **(E)**.
Stabiliamo che la casella centrale della scacchiera è di tipo C, ogni casella d'angolo è di tipo A e le rimanenti caselle sono di tipo B. Osserviamo che:

- fissata una casella di tipo A vi sono 2 percorsi di un passo che conducono da questa in una di tipo B e 1 percorso di un passo che conduce in C;
- fissata una casella di tipo B vi sono 2 percorsi di un passo che conducono da questa in una di tipo A, 2 percorsi di un passo che conducono in una di tipo B e 1 percorso di un passo che conduce in C;
- vi sono 4 percorsi di un passo da C in caselle di tipo A, 4 percorsi di un passo da C in caselle di tipo B.

Da ciò segue che, in due passi, vi sono:

- 8 percorsi che conducono da C in una casella di tipo A;
- 16 percorsi che conducono da C in una casella di tipo B;
- 8 percorsi che conducono da C in una casella di tipo C.

Poiché ogni casella di tipo A ha 3 caselle adiacenti, ogni casella di tipo B ne ha 5 e la casella centrale C ne ha 8, il numero totale di percorsi di 3 passi è dato da:

$$8 \cdot 3 + 16 \cdot 5 + 8 \cdot 8 = 24 + 80 + 64 = 168.$$

[Problema proposto da D'Aurizio.]