PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- Soluzioni biennio

17 novembre 2010

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	C
2	B
3	C
4	A
5	D
6	E
7	E
8	C
9	A
10	D

Problema	Risposta corretta
11	C
12	C
13	D
14	B
15	C
16	B
17	A
18	A
19	E
20	B

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(C)**.
Se il primo dei 45 giorni è un lunedì, allora ci sono 7 lunedì posti nei giorni: 1, 8, 15, 22, 29, 36 e 43. Dunque ci possono essere 7 lunedì. D'altra parte se ce ne fossero 8 (o di più), ci sarebbero 7 settimane, ovvero 49 giorni, in 45 giorni, e questo è impossibile.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

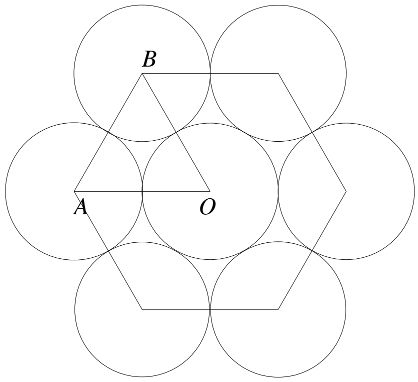
2. La risposta è **(B)**.
Poichè nella cesta ci sono calzini di tre colori diversi, se Emilio ne prende quattro, tra questi ce ne sono sicuramente due dello stesso colore. D'altra parte, se ne prende solo tre, è possibile che siano di tre colori diversi tra loro. Il numero minimo è quindi quattro.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

3. La risposta è **(C)**.
Il triangolo BCD è equilatero, quindi BD misura 100 m. Inoltre l'angolo $\widehat{DBC}$ è di 60° e $\widehat{ABC}$ è il suo angolo complementare, quindi i punti A, B e D sono allineati. Ne segue che la misura del segmento AD è la somma delle misure di AC e di BD, ovvero 200 m.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

4. La risposta è **(A)**.
In tutte le serie di disuguaglianze figurano i tre numeri $A = 2\sqrt{2}$, $B = \sqrt{10}$ e $C = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, che elevati al quadrato fanno rispettivamente: $A^2 = 8$, $B^2 = 10$, $C^2 = 5+3+2\sqrt{15} = 8+\sqrt{15}$. Quindi $A^2 < B^2$, e, poiché $\sqrt{15} > 2$, $B^2 < 8 + \sqrt{15} = C^2$. Dunque $A^2 < B^2 < C^2$, e, dato che

A, B e C sono positivi, segue che $A < B < C$, ovvero $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

5. La risposta è **(D)**.
I centri del cerchio centrale giallo e dei primi due petali che Matilde dispone, indicati rispettivamente con O, A e B nella figura, formano un triangolo equilatero.



In particolare l'angolo $\widehat{AOB}$ è di 60°, 1/6 dell'angolo giro. Quindi il sesto petalo che viene disposto è tangente al primo, e al cerchio giallo, e completa la configurazione.
[Problema proposto da C. Bianchi.]

6. La risposta è **(E)**.
Abbiamo: $a + b \geq 0$, $b + c \geq 0$ e $a + c \geq 0$. Sommando termine a termine queste tre disuguaglianze otteniamo $2(a + b + c) \geq 0$, e quindi $a + b + c \geq 0$. Osserviamo anche che scegliendo $a = -1$ e $b = c = 10$ si vede che le affermazioni **(A)**, **(B)** e **(D)** non sono verificate; analogamente, scegliendo $a = b = c = 1$ si vede che l'affermazione **(C)** non è verificata.
[Problema proposto da A. Colesanti.]

7. La risposta è **(E)**.
Supponiamo che Concetta colori lo stato centrale A di rosso. A questo punto, poiché A confina con ogni altro stato, non può colorare di rosso nessun altro stato e quindi ha a disposizione due soli colori per colorare gli altri stati diversi da A. Supponiamo allora che colori lo stato B di verde; allora è obbligata a colorare C, confinante con B, di giallo e succesivamente deve colorare: D di verde, E di giallo, F di verde, G di giallo. Altrimenti, sempre supponendo che abbia colorato A di rosso, può colorare B di giallo e di conseguenza deve colorare tutti gli altri stati con colori alternati tra il giallo e il verde, ottenendo così una seconda colorazione. Comunque, una volta scelto il colore di A, le possibili colorazioni sono solo due, ciascuna corrispondente alla scelta del colore di B. Poiché per il colore di A ci sono tre possibilità, si hanno in tutto $3 \times 2 = 6$ possibili colorazioni distinte.
[Problema proposto da R. Morandin.]

8. La risposta è **(C)**.
Chiamiamo L la lunghezza in metri di AB e indichiamo con v_a e v_b le velocità, in metri al secondo, di Alberto e Barbara rispettivamente. Al momento del primo incontro Alberto cammina da $\dfrac{L-700}{v_a}$ secondi e Barbara cammina da $\dfrac{700}{v_b}$ secondi, quindi

$$\frac{L-700}{v_a} = \frac{700}{v_b},$$

da cui possiamo trovare il rapporto tra le due velocità:

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{L - 700}{700}\,.$$

Analogamente, al momento del secondo incontro Alberto ha percorso $(2L - 400)$ m e quindi cammina da $\dfrac{2L-400}{v_a}$ secondi mentre Barbara, che ha percorso $(L + 400)$ m, cammina da $\dfrac{L+400}{v_b}$ secondi. Quindi

$$\frac{2L - 400}{v_a} = \frac{L + 400}{v_b}\,,$$

da cui

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{2L - 400}{L + 400}\,.$$

Uguagliando tra loro i due valori del rapporto tra le due velocità che abbiamo ottenuto troviamo

$$\frac{L - 700}{700} = \frac{2L - 400}{L + 400}\,.$$

Da questa uguaglianza segue

$$L^2 - 1700\,L = L(L - 1700) = 0\,.$$

Poichè L deve essere strettamente positivo, troviamo $L = 1700$.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

9. La risposta è **(A)**.
Luca scrive alla lavagna $2010 : 2 = 1005$ numeri. Osserviamo inoltre che $2010 = 670 \times 3$ e quindi ci sono 670 multipli di tre compresi tra 2 e 2010 (di cui il primo è 3). Questi multipli di tre sono alternativamente uno pari e uno dispari, quindi quelli scritti da Luca, ovvero i multipli pari di tre, sono la metà di 670, cioè 335. Quindi Giovanni cancella 335 numeri e ne rimangono $1005 - 335 = 670$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

10. La risposta è **(D)**.
Chiamiamo C il numero iniziale di corsie e x il valore della percentuale X (cioè il numero senza il simbolo di percentuale). Dopo l'aumento del 60% il numero di corsie diventa

$$C + C\left(\frac{60}{100}\right) = \frac{8}{5}\,C\,.$$

Dopo la riduzione il numero di corsie diventa

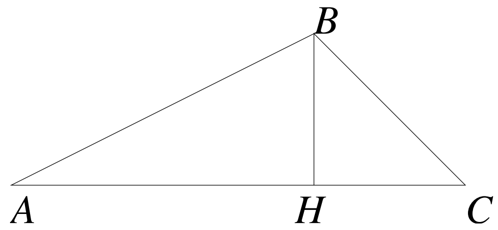
$$\frac{8}{5}\,C - \frac{8}{5}\,C\,\frac{x}{100} = \frac{8}{5}\,C\left(1 - \frac{x}{100}\right)\,,$$

e questo numero deve coincidere con il numero iniziale C, quindi

$$\frac{8}{5}\,C\left(1 - \frac{x}{100}\right) = C\,.$$

Da questa equazione, dopo aver diviso entrambi i termini per C, si può ricavare il valore $x = 37,5$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

11. La risposta è **(C)**.
Facendo riferimento alla figura, se $\widehat{CAB}$ misura 30° e $\widehat{ABC}$ misura 105°, e BH è l'altezza relativa a AC, si ha che $\widehat{ABH}$ misura 60° e $\widehat{HBC}$ misura 45°.



Dunque ABH è metà di un triangolo equilatero di lato 2 cm, da cui ricaviamo che BH misura 1 cm e AH misura $\sqrt{3}$ cm. Inoltre BHC è un triangolo rettangolo isoscele, quindi HC misura 1 cm come BH e l'ipotenusa BC misura $\sqrt{2}$ cm. Il perimetro richiesto è allora $\overline{AH} + \overline{HC} + \overline{BC} + \overline{AB} = (\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} + 2) = (3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm.
[Problema proposto da F. Poloni.]

12. La risposta è **(C)**.
Prima soluzione. Chiamiamo S la somma richiesta; osserviamo che il numero di termini della somma è $1 + 34 \times 2 + 1 = 70$. Possiamo scrivere

$$\begin{array}{lllllllll} S = 1 & + & 2 & + & \ldots & + & 35 & + & 36 \\ S = 36 & + & 35 & + & \ldots & + & 2 & + & 1\,. \end{array}$$

Notiamo che la somma di ogni coppia di termini incolonnati è sempre uguale a 37. Qundi se sommiamo termine a termine le due uguaglianze scritte sopra troviamo che $2S$ è pari alla somma di 70 termini tutti uguali a 37. Dunque $2S = 37 \times 70$ e quindi $S = 37 \times 35 = 1295$.

Seconda soluzione. Possiamo raggruppare i termini della somma richiesta S nel modo seguente

$$\begin{aligned} S &= (1+2) + (2+3) + (3+4) + \cdots + (34+35) + (35+36) \\ &= 3 + 5 + 7 + \cdots + 69 + 71 = (1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 69 + 71) - 1\,. \end{aligned}$$

Quindi S è la somma di tutti i numeri dispari consecutivi da 1 a 71, diminuita di 1. Osserviamo ora che quando si sommano i numeri dispari consecutivi compresi tra 1 e un certo numero dispari, si trova sempre un quadrato perfetto, e più precisamente, se l'ultimo numero dispari che si è sommato è $(2k-1)$, si trova k^2. In altre parole vale l'uguaglianza

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2k-1) = k^2\,.$$

Questa può essere facilmente verificata per i primi valori di $k = 1, 2, 3, \ldots$, e può essere dimostrata per ogni scelta di k usando il principio di induzione. Nel caso del problema in questione abbiamo $71 = 2 \times 36 - 1 = 2k - 1$, con $k = 36$. Utilizzando la formula riportata sopra troviamo

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (2 \times 36 - 1) = 36^2 = 1296\,,$$

da cui segue $S = 1296 - 1 = 1295$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

13. La risposta è **(D)**.
I numeri da 1 a 9 (compresi) danno 9 cifre. I numeri da 10 a 99 (compresi) sono 90 e danno 2

cifre ciascuno, quindi danno comlessivamente 180 cifre. I numeri da 100 a 999 (compresi) sono 900 e danno complessivamente $900 \times 3 = 2700$ cifre. I numeri da 1000 a 2010 (compresi) sono 1011 e danno complessivamente $4 \times 1011 = 4044$ cifre. Il numero richiesto è allora formato da $(9 + 180 + 2700 + 4044) = 6933$ cifre.
[Problema proposto da C. Di Stefano.]

14. La risposta è **(B)**.
In un esagono gli angoli interni ai vertici sono di 120°, quindi l'angolo $\widehat{ABC}$ misura 120°. Per motivi di simmetria la retta per B ed E è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$, dunque $\widehat{AGB}$ misura 60°. Inoltre le due diagonali AC e BE si intersecano perpendicolarmente. Quindi il triangolo ABG è metà di un triangolo equilatero di lato 1 cm la cui area è $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2, quindi la sua area è $\dfrac{\sqrt{3}}{8}$ cm^2.
[Problema proposto da D. Lombardo.]

15. La risposta è **(C)**.
Il numero 112233445566778899 ha 18 cifre e può essere scritto come:

$$\begin{aligned} 112233445566778899 &= 11 \times 10^{16} + 2233445566778899 \\ &= 11 \times 10^{16} + 22 \times 10^{14} + 33445566778899 \\ &\vdots \\ &= 11 \times 10^{16} + 22 \times 10^{14} + \cdots + 88 \times 10^2 + 99\,. \end{aligned}$$

Quindi, se lo dividiamo per 11 otteniamo

$$\begin{aligned} (112233445566778899)/11 &= 10^{16} + 2 \times 10^{14} + \cdots + 8 \times 10^2 + 9 \\ &= 10203040506070809\,, \end{aligned}$$

che è un numero di 17 cifre.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

16. La risposta è **(B)**.
Scriviamo un generico numero di 4 cifre, che ha le proprità richieste dal problema, come $mcdu$, ovvero m, c, d e u indicano rispettivamente la cifra delle migliaia, delle centinaia, delle decine e delle unità. La cifra m non deve soddisfare nessuna condizione, e quindi può variare da 1 a 9, indipendentemente dalle altre. Sulle cifre c, d e u sappiamo che ciascuna di loro varia tra 0 e 9 e $c + d = u$. Supponiamo che $u = 0$, allora necessariamente $c = d = 0$. Dunque se $u = 0$ abbiamo una sola possibiltà per c e d. Se $u = 1$, abbiamo due possibilità: $c = 1$ e $d = 0$ oppure $c = 0$ e $d = 1$. Analogamente, se $u = 2$ si vede che ci sono tre possibilità. In generale, per ogni scelta di u ci sono tante possibilità di scegliere c e d quanti sono i modi distinti di scrivere u come somma di due nuneri interi compresi tra 0 e 9, e questi modi distinti sono esattamente $u + 1$. Quindi le possibili scelte per le cifre c, d e u sono in totale

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55\,.$$

Per ciascuna di queste scelte abbiamo 9 scelte di m. In tutto i numeri che hanno la proprietà richiesta sono allora $55 \times 9 = 495$.
[Problema proposto da L. Tolomeo.]

17. La risposta è **(A)**.
Il Triangolo AED, se "raddoppiato" rispetto ad ED, diventa un triangolo equilatero, quindi la misura di AD è la metà di quella di AE, ovvero AE misura 2 m e quindi EB misura 1 m, come FC e AD. Risulta chiaro allora, per motivi di simmetria, che il triangolo DEF è equilatero. Applicando il teorema di Pitagora a ADE troviamo che ED misura $\sqrt{4-1}\ \text{m} = \sqrt{3}\ \text{m}$ e quindi la sua altezza è $\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{m} = \frac{3}{2}$. L'area di DEF è allora

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{3} \times \frac{3}{2}\,\text{m}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{4}\,\text{m}^2\,.$$

[Problema proposto da S. Di Trani.]

18. La risposta è **(A)**.
Osserviamo che Enrico fa un'affermazione vera, perchè dice semplicemente che se il colpevole è una persona allora ogni altra persona è innocente; quindi Enrico è innocente. Se Cecilia fosse colpevole allora mentirebbe e quindi in particolare Anna sarebbe innocente e quindi direbbe la verità. Ma Anna afferma che il colpevole è un maschio, in contraddizione con il fatto che la colpevole è Cecilia, quindi il fatto che Cecilia sia colpevole porta ad una contraddizione. Deduciamo che Cecilia è innocente. Quindi l'affermazione di Cecilia è vera e, poichè Enrico non può essere il colpevole, Anna è necessariamente la colpevole.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

19. La risposta è **(E)**.
Supponiamo che x e y abbiano la proprietà richiesta. Allora

$$x^2 - 1 - xy + y = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1) - y(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+1-y) = 0\,.$$

Il fattore $(x-1)$ nono può essere nullo perchè x è strettamente maggiore di 1. D'altra parte il fattore $(x+1-y)$ è nullo per ogni scelta di x e y tale che $y = x+1$. Quindi, per ogni scelta del numero intero x strettamente maggiore di 1, scegliendo $y = x+1$ (che è ancora un numero intero strettamente maggiore di 1), la relazione richiesta è verificata. In conclusione, le coppie che soddisfano l'uguaglianza sono infinite.
[Problema proposto da L. Tolomeo]

20. La risposta è **(B)**.
Se i pezzi non si sovrappongono allora l'area della figura che essi formano deve essere uguale a quella della figura di partenza. Quindi il quadrato deve avere la stessa area del triangolo; questo ha altezza $20\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{m} = 10\sqrt{3}\,\text{m}$. L'area del triangolo, e del quadrato, è allora

$$\frac{1}{2}200\sqrt{3} = 100\sqrt{3}\,\text{m}^2\,.$$

Il lato del quadrato è la radice della sua area e quindi misura $10\sqrt[4]{3}$ m.
[Problema proposto da K. Kuzmin.]

PROGETTO OLIMPIADI DI MATEMATICA
U.M.I. UNIONE MATEMATICA ITALIANA
MINISTERO DELLA PUBBLICA ISTRUZIONE
SCUOLA NORMALE SUPERIORE

I Giochi di Archimede -- Soluzioni triennio

17 novembre 2010

Griglia delle risposte corrette

Problema	Risposta corretta
1	C
2	B
3	A
4	A
5	D
6	E
7	A
8	D
9	C
10	C
11	D
12	A
13	B

Problema	Risposta corretta
14	C
15	D
16	A
17	C
18	C
19	C
20	B
21	D
22	D
23	D
24	A
25	D

Risoluzione dei problemi

1. La risposta è **(C)**.
Se il primo dei 45 giorni è un lunedì, allora ci sono 7 lunedì posti nei giorni: 1, 8, 15, 22, 29, 36 e 43. Dunque ci possono essere 7 lunedì. D'altra parte se ce ne fossero 8 (o di più), ci sarebbero 7 settimane, ovvero 49 giorni, in 45 giorni, e questo è impossibile.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

2. La risposta è **(B)**.
Poichè nella cesta ci sono calzini di tre colori diversi, se Emilio ne prende quattro, tra questi ce ne sono sicuramente due dello stesso colore. D'altra parte, se ne prende solo tre, è possibile che siano di tre colori diversi tra loro. Il numero minimo è quindi quattro.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

3. La risposta è **(A)**.
Il più piccolo numero con 10 cifre è 10^9; analogamente il più piccolo numero con 11 cifre è 10^{10}, quindi il numero precedente, $10^{10} - 1$, è il più grande numero con 10 cifre. Quindi se N è un qualsiasi numero con 10 cifre, deve essere compreso tra 10^9 e $10^{10} - 1$:
$$10^9 \leq N \leq 10^{10} - 1\,.$$

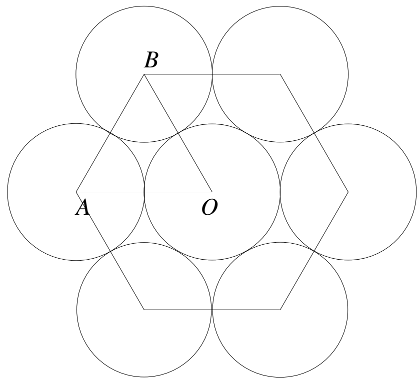
Elevando tutti i termini al quadrato si ha

$$(10^9)^2 = 10^{18} \leq N^2 \leq (10^{10} - 1)^2 = 10^{20} - 2 \times 10^{10} + 1 < 10^{20}\,.$$

Quindi possiamo dire che il numero di cifre di N^2 è certamente compreso tra 19 e 21; in particolare è minore di 25.
[Problema proposto da C. Di Stefano.]

4. La risposta è **(A)**.
In tutte le serie di disuguaglianze figurano i tre numeri $A = 2\sqrt{2}$, $B = \sqrt{10}$ e $C = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, che elevati al quadrato fanno rispettivamente: $A^2 = 8$, $B^2 = 10$, $C^2 = 5+3+2\sqrt{15} = 8+\sqrt{15}$. Quindi $A^2 < B^2$, e, poiché $\sqrt{15} > 2$, $B^2 < 8 + \sqrt{15} = C^2$. Dunque $A^2 < B^2 < C^2$, e, dato che A, B e C sono positivi, segue che $A < B < C$, ovvero $2\sqrt{2} < \sqrt{10} < \sqrt{5} + \sqrt{3}$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

5. La risposta è **(D)**.
I centri del cerchio centrale giallo e dei primi due petali che Matilde dispone, indicati rispettivamente con O, A e B nella figura, formano un triangolo equilatero.



In particolare l'angolo $\widehat{AOB}$ è di 60°, 1/6 dell'angolo giro. Quindi il sesto petalo che viene disposto è tangente al primo, e al cerchio giallo, e completa la configurazione.
[Problema proposto da C. Bianchi.]

6. La risposta è **(E)**.
Abbiamo: $a + b \geq 0$, $b + c \geq 0$ e $a + c \geq 0$. Sommando termine a termine queste tre disuguaglianze otteniamo $2(a + b + c) \geq 0$, e quindi $a + b + c \geq 0$. Osserviamo anche che scegliendo $a = -1$ e $b = c = 10$ si vede che le affermazioni **(A)**, **(B)** e **(D)** non sono verificate; analogamente, scegliendo $a = b = c = 1$ si vede che l'affermazione **(C)** non è verificata.
[Problema proposto da A. Colesanti.]

7. La risposta è **(A)**.
Nessuna colorazione è possibile. Supponiamo di colorare lo stato centrale A di rosso. Poichè A confina con ogni altro stato non possiamo usare il rosso per nessun altro stato. Supponiamo di colorare lo stato B di verde; allora necessariamente i colori degli altri stati sono: C giallo, D verde, E giallo, F verde, G giallo. A questo punto la colorazione di H è impossibile: se lo coloriamo di verde avrà lo stesso colore dello stato confinante B; se lo coloriamo di giallo avrà lo stesso colore dello stato confinante G. Allo stesso modo si vede che ogni altra colorazione è impossibile.
[Problema proposto da R. Morandin.]

8. La risposta è **(D)**.
Chiamiamo C il numero iniziale di corsie e x il valore della percentuale X (cioè il numero senza il simbolo di percentuale). Dopo l'aumento del 60% il numero di corsie diventa

$$C + C\left(\frac{60}{100}\right) = \frac{8}{5}C\,.$$

Dopo la riduzione il numero di corsie diventa

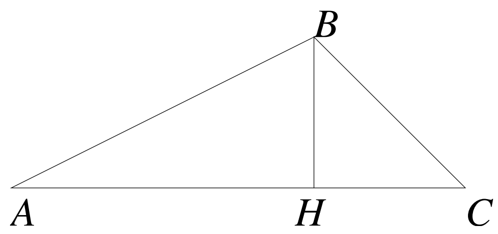
$$\frac{8}{5}C - \frac{8}{5}C\,\frac{x}{100} = \frac{8}{5}C\,\left(1 - \frac{x}{100}\right)\,,$$

e questo numero deve coincidere con il numero iniziale C, quindi

$$\frac{8}{5}C\,\left(1 - \frac{x}{100}\right) = C\,.$$

Da questa equazione, dopo aver diviso entrambi i termini per C, si può ricavare il valore $x = 37,5$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

9. La risposta è **(C)**.
Facendo riferimento alla figura, se $\widehat{CAB}$ misura 30° e $\widehat{ABC}$ misura 105°, e BH è l'altezza relativa a AC, si ha che $\widehat{ABH}$ misura 60° e $\widehat{HBC}$ misura 45°.



Dunque ABH è metà di un triangolo equilatero di lato 2 cm, da cui ricaviamo che BH misura 1 cm e AH misura $\sqrt{3}$ cm. Inoltre BHC è un triangolo rettangolo isoscele, quindi HC misura 1 cm come BH e l'ipotenusa BC misura $\sqrt{2}$ cm. Il perimetro richiesto è allora $\overline{AH} + \overline{HC} + \overline{BC} + \overline{AB} = (\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} + 2) = (3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm.
[Problema proposto da F. Poloni.]

10. La risposta è **(C)**.
Prima soluzione. Chiamiamo S la somma richiesta; ossierviamo che il numero di termini della somma è $1 + 34 \times 2 + 1 = 70$. Possiamo scrivere

$$\begin{array}{lcccccccc} S = 1 & + & 2 & + & \dots & + & 35 & + & 36 \\ S = 36 & + & 35 & + & \dots & + & 2 & + & 1\,. \end{array}$$

Notiamo che la somma di ogni coppia di termini incolonnati è sempre uguale a 37. Qundi se sommiamo termine a termine le due uguaglianze scritte sopra troviamo che $2S$ è pari alla somma di 70 termini tutti uguali a 37. Dunque $2S = 37 \times 70$ e quindi $S = 37 \times 35 = 1295$.

Seconda soluzione. Possiamo raggruppare i termini della somma richiesta S nel modo seguente

$$\begin{aligned} S &= (1+2) + (2+3) + (3+4) + \cdots + (34+35) + (35+36) \\ &= 3 + 5 + 7 + \cdots + 69 + 71 = (1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 69 + 71) - 1\,. \end{aligned}$$

Quindi S è la somma di tutti i numeri dispari consecutivi da 1 a 71, diminuita di 1. Osserviamo ora che quando si sommano i numeri dispari consecutivi compresi tra 1 e un certo numero dispari, si trova sempre un quadrato perfetto, e più precisamente, se l'ultimo numero dispari che si è sommato è $(2k-1)$, si trova k^2. In altre parole vale l'uguaglianza

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2\,.$$

Questa può essere facilmente verificata per i primi valori di $k=1,2,3,\ldots$, e può essere dimostrata per ogni scelta di k usando il principio di induzione. Nel caso del problema in questione abbiamo $71=2\times 36-1=2k-1$, con $k=36$. Utilizzando la formula riportata sopra troviamo

$$1+2+3+\cdots+(2\times 36-1)=36^2=1296\,,$$

da cui segue $S=1296-1=1295$.
[Problema proposto da L. Ghidelli e G. Paolini.]

11. La risposta è **(D)**.
Chiamiamo V, P e S i rispettivi numeri di vittorie, pareggi e sconfitte ottenuti dalla squadra. Sappiamo che $V+S+P=13$, $S=P$, $3V+P=29$. Quindi, eliminando una delle due incognite S e P, ad esempio S, grazie alla seconda equazione, abbiamo

$$\begin{cases} V+2P &= 13\,,\\ 3V+P &= 29\,.\end{cases}$$

Da questo sistema si ricava facilmente $V=9$.
[Problema proposto da C. Di Stefano.]

12. La risposta è **(A)**.
Prima soluzione. Le (eventuali) radici reali dell'equazione sono date dalla formula

$$\frac{-n\pm\sqrt{n^2-9}}{3}\,.$$

Quindi n^2-9 deve essere un numero strettamente positivo (perchè si richiede che le soluzioni siano distinte). Inoltre, affinchè le radici siano numeri interi, i numeri $-n\pm\sqrt{n^2-9}$ devono essere a loro volta numeri interi, divisibili per 3. Quindi $\sqrt{n^2-9}$ deve essere un numero intero, e questo è possibile solo se n^2-9 è un quadrato perfetto. Supponiamo che questo si verifichi: $n^2-9=m^2$, con $m\geq 1$ numero naturale. Dunque $n^2-m^2=9$ e quindi $(n-m)(n+m)=9$. Osserviamo $(n-m)$ e $(n+m)$ sono entrambi positivi: $(n+m)$ lo è perchè somma di due numeri positivi e $(n-m)$ ha lo stesso segno di $n+m$ perchè il loro prodotto è positivo. Allora i numeri $n-m$ e $n+m$ devono essere divisori di 9, che ha come divisori 1, 3 e 9. Abbiamo allora solo due possibilità: $n-m=n+m=3$ oppure $n+m=9$ e $n-m=1$ (osserviamo che $n-m=9$ e $n+m=1$ non deve essere considerata perchè $n+m>n-m$). La prima possibilità porta a $n=3$ e $m=0$ e non è accettabile poichè in questo caso $n^2-9=0$ e le radici sono coincidenti. La seconda possibilità porta a $n=5$ da cui segue che le due soluzioni sono:

$$\frac{-5\pm 4}{3}\,.$$

e di queste solo una è un numero intero. Dunque non ci sono valori accettabili di n.

Seconda soluzione. Supponiamo che l'equazione data abbia due soluzioni reali distinte, e che siano due numeri interi. Chiamiamo x_1 e x_2 queste soluzioni. Allora x_1 e x_2 risolvono anche l'equazione

$$x^2+\frac{2n}{3}+1=0$$

ottenuta dividendo ambo i termini dell'equazione di partenza per 3. Si vede allora che il prodotto di x_1 e x_2 deve essere uguale a 1, e questo è possibile solo se $x_1 = x_2 = 1$ oppure $x_1 = x_2 = -1$; in entrambi i casi le soluzioni coincidono e quindi non verificano una delle condizioni richieste.

13. La risposta è **(B)**.
In un esagono gli angoli interni ai vertici sono di 120°, quindi l'angolo $\widehat{ABC}$ misura 120°. Per motivi di simmetria la retta per B ed E è la bisettrice dell'angolo $\widehat{ABC}$, dunque $\widehat{AGB}$ misura 60°. Inoltre le due diagonali AC e BE si intersecano perpendicolarmente. Quindi il triangolo ABG è metà di un triangolo equilatero di lato 1 cm la cui area è $\frac{\sqrt{3}}{4}$ cm^2, quindi la sua area è $\frac{\sqrt{3}}{8}$ cm^2.
[Problema proposto da D. Lombardo.]

14. La risposta è **(C)**.
Il numero 111222333444555666777888999 ha 27 cifre e può essere scritto come:

$$\begin{aligned}111222333444555666777888999 &= 111 \times 10^{24} + 222333444555666777888999 \\ &= 111 \times 10^{24} + 222 \times 10^{21} + 333444555666777888999 \\ &\vdots \\ &= 111 \times 10^{24} + 222 \times 10^{21} + \cdots + 888 \times 10^{3} + 999\,.\end{aligned}$$

Quindi, se lo dividiamo per 111 otteniamo

$$\begin{aligned}(111222333444555666777888999)/111 &= 10^{24} + 2 \times 10^{21} + \cdots + 8 \times 10^{3} + 9 \\ &= 1002003004005006007008009\,,\end{aligned}$$

che è un numero di 25 cifre.
[Problema proposto da X.Y. Lu.]

15. La risposta è **(D)**.
Chiamiamo T il tempo (in secondi) impiegato per percorrere il primo chilometro. Allora i tempi impiegati per percorrere i chilometri successivi sono: $(T-5)$ per il secondo, $(T-10)$ per il terzo, $(T-15)$ per il quarto e $(T-20)$ per il quinto. Il tempo complessivo è la somma di tutti questi tempi, cioè: $T+(T-5)+(T-10)+(T-15)+(T-20) = 5T-50$ e questo deve coincidere con il tempo totale impiegato dall'atleta, che, espresso in secondi, è: $(16 \times 60 + 40) = 1000$. Dall'equazione $5T - 50 = 1000$ si ricava $T = 210$. Quindi il tempo impiegato per percorrere il quinto chilometro è $T - 20 = 210 - 20 = 190$ secondi, ovvero 3 minuti e 10 secondi.
[Problema proposto da P. Negrini.]

16. La risposta è **(A)**.
Se sviluppiamo tutti i quadrati contenuti nell'equazione otteniamo:

$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 + 2yz + z^2 = x^2 + 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2$$

e questa uguaglianza diventa

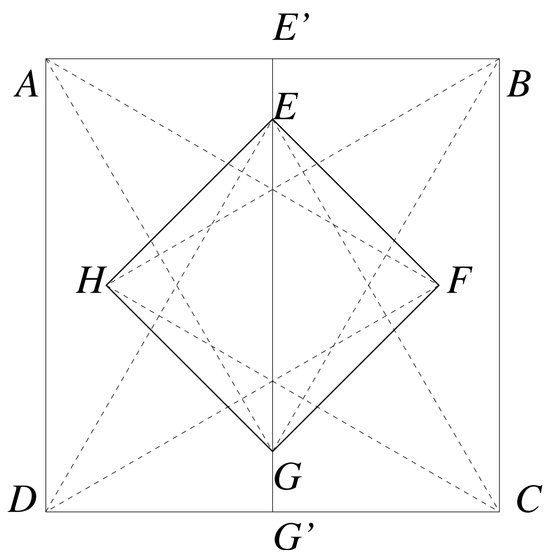
$$4yz - 4xy = 0 \Rightarrow y(z-x) = 0\,.$$

In particolare quest'ultima uguaglianza è verificata se $y = 0$ e x e z assumono uno qualsiasi dei valori ammissibili. Dunque tutte le terne della forma $(x, 0, z)$, al variare sia di x che di z da 0 a 100, sono soluzioni. Poichè x e z possono assumere 101 valori distinti ciascuno, le terne di questo tipo sono 101^2. Se $y \neq 0$ l'equazione risulta soddisfatta se $x = z$, quindi le terne della forma (x, y, x) sono soluzioni, al variare di x da 0 a 101 e al variare di y da 1 a 101. Le terne di questo tipo sono allora $100 \cdot 101$. Osserviamo che non ci sono altre soluzioni oltre a quelle trovate. In tutto le soluzioni sono allora:

$$101^2 + 100 \cdot 101 = 101(101 + 100) = 101 \cdot 201\,.$$

[Problema proposto da Fioravanti.]

17. La risposta è **(C)**.



Osserviamo prima di tutto che $EFGH$ è un quadrato. L'altezza del triangolo ABG è $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ m, poichè questo triangolo è equilatero e ha lato 1 m. Tracciamo la retta per E e G e chiamiamo E' e G' i punti in cui questa retta incontra i lati AB e CD rispettivamente. La lunghezza del segmento EE' può essere ottenuta per differenza tra la lunghezza di $E'G'$, che è 1 m, e la lunghezza di $G'E$, che è l'altezza del triangolo ABG trovata prima. Quindi EE' misura $\left(1 - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ m. Chiaramente il segmento GG' ha la stessa misura di EE'. Quindi possiamo trovare la misura di EG:

$$\left(1 - 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \text{m} = (\sqrt{3} - 1)\,\text{m}\,.$$

A questo punto conosciamo la lunghezza della diagonale del quadrato $EFGH$ e possiamo trovare la sua area moltiplicando la lunghezza della diagonale per se stessa e dividendo per 2. L'area cercata è allora

$$\frac{1}{2}(\sqrt{3} - 1)^2\,\text{m}^2 = \frac{1}{2}(3 + 1 - 2\sqrt{3})\,\text{m}^2 = (2 - \sqrt{3})\,\text{m}^2\,.$$

[Problema proposto da D. Lombardo.]

18. La risposta è **(C)**.
Osserviamo che $2010 \cdot 2011$ non è un quadrato perfetto, e il più grande quadrato perfetto minore di $2010 \cdot 2011$ è 2010^2. I numeri con le proprietà richieste sono allora i numeri della forma n^2, con n numero naturale, per cui

$$100 \leq n^2 \leq 2010^2 ,$$

da cui segue, passando alle radici, che n deve essere compreso tra 10 e 2010, estremi inclusi. Quindi ci sono $2010 - 9$ possibilità per n, ovvero 2001 numeri con le proprietà richieste dal problema.
[Problema proposto da S. Di Trani.]

19. La risposta è **(C)**.
Il quinto gatto mente certamente: se infatti affermasse la verità, allora lui sarebbe nero, in contrasto col fatto che dice il vero. Osserviamo poi che se il primo gatto è nero allora il terzo afferma il vero e quindi è viola; se invece il primo gatto è viola, allora il terzo mente e quindi è nero. Ne deduciamo che uno di loro è nero e l'altro è viola. Inoltre, le affermazioni del secondo e del quarto gatto non possono essere entrambe vere perchè in tutto i gatti sono 5. Quindi almeno uno di loro due è nero. Allora ci sono almeno tre gatti neri: il quinto, uno tra il primo e il terzo e almeno uno tra il secondo e il quarto. Quindi il quarto gatto afferma una cosa vera e di conseguenza è viola, mentre il secondo gatto è certamente nero. In conclusione ci sono tre gatti neri: il quinto, il secondo e uno tra il primo e il terzo, e due gatti viola: il quarto e uno tra il primo e il terzo.
[Problema proposto da un gruppo di studenti di Parma.]

20. La risposta è **(B)**.
Supponiamo di aver scelto le prime 4 cifre della combinazione in accordo con quanto richiesto dal problema, e siano S la loro somma e q la quinta cifra della combinazione. $S+q$ deve essere divisibile per tre; se S è divisibile per 3, allora anche q deve esserlo e quindi i possibili valori di q sono: 3, 6, 9. Se S non è divisibile per 3 e il resto della sua divisione per tre è 1, allora i possibili valori di q sono: 2, 5, 8, ovvero i numeri interi compresi tra 1 e 9 il cui resto della divizione per tre è 2. Analogamente, se S non è divisibile per 3 e il resto della sua divisione per 3 è 2, allora i possibili valori di q sono: 1, 4, e 7. Per ogni valore di S abbiamo 3 possibili scelte di q. Consideriamo ora le prime 4 cifre della combinazione. In base alla loro parità (p) o disparità (d) sono possibili sei combinazioni:

$$ppdd\,,\ pdpd\,,\ pddp\,,\ ddpp\,,\ dpdp\,,\ dppd\,.$$

In ciascuna di queste combinazioni, le due cifre pari possono assumere 4 valori ciascuna (2, 4, 6, 8) e le cifre dispari possono assumere cinque valori ciascuna (1, 3, 5, 7, 9). Abbiamo in tutto $6 \cdot 4^2 \cdot 5^2 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^2$ possibilità per le prime 4 cifre. Come abbiamo visto sopra, per ciascuna scelta ammissibile delle prime 4 cifre ci sono 3 scelte possibili della quinta cifra. Le combinazioni possibili sono allora: $2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ in tutto.
[Problema proposto da Fioravanti]

21. La risposta è **(D)**.
Ogni 5 secondi sbadiglia un numero di studenti doppio rispetto a quanti avevano sbadigliato 5 secondi prima. In 57 secondi ci sono 11 intervalli di 5 secondi. Quindi:

all'inizio sbadiglia la Bella Addormentata,

dopo 5 secondi sbadigliano altri $2 = 2^1$ studenti,

dopo 10 secondi sbadigliano altri $4 = 2^2$ studenti, dopo 15 secondi sbadigliano altri $8 = 2^3$ studenti,

$\vdots$

dopo 55 secondi sbadigliano altri 2^{11} studenti.

Osserviamo che non ci sono altri studenti che sbadigliano tra 55 e 57 secondi. Il numero di studenti complessivo è allora

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{11}\,.$$

La somma delle prime N potenze consecutive di un numero q (diverso da 1) può essere espressa dalla formula:

$$q^0 + q^1 + q^2 + \cdots + q^N = \frac{q^{N+1} - 1}{q - 1}\,.$$

Nel nostro caso abbiamo $q = 2$ e $N = 11$ e otteniamo

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{11} = \frac{2^{12} - 1}{2 - 1} = 2^{12} - 1 = 4096 - 1 = 4095\,.$$

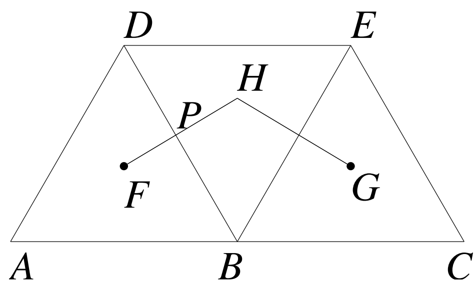
[Problema proposto da un gruppo di studenti di Parma.]

22. La risposta è **(D)**.
Ad ogni incantesimo il numero di palline aumenta o diminuisce di un multiplo di 3, quindi il resto della divisione per 3 del numero di palline nere rimane sempre uguale a quello iniziale, cioè 1. In base a questa osservazione possiamo escludere le risposte **(A)**, **(B)** e **(C)**, nelle quali il resto della divisione del numero di palline nere per 3 è 0, 2 e 2 rispettivamente. Analogamente, ad ogni incantesimo il numero di palline bianche aumenta o diminuisce di un numero pari e quindi, essendo inizialmente dispari, rimane sempre dispari. Questo permette di escludere la risposta **(E)**, in cui il numero di palline bianche è pari. Resta solo la risposta **(D)**, che rappresenta una situazione che può verificarsi con la successione di incantesimi:

$$(7, 7) \to (9, 4) \to (11, 1) \to (7, 10) \to (9, 7) \to (11, 4) \to (7, 13)$$

(in ciascuna coppia il primo elemento è il numero palline bianche e il secondo è quello di palline nere).
[Problema proposto da L. Ghidelli e G Paolini.]

23. La risposta è **(D)**.
Il triangolo DBE è equilatero e ha lato 1 cm. Indichiamo con F, G e H i centri dei triangoli ABD, BCE e BED rispettivamente, come indicato in figura.



Sia P il punto di intersezione tra i segmenti AE e DB. Osserviamo che AP è l'altezza di ABD rispetto al lato BD e EP è l'altezza di DBE rispetto a BD. Dunque la distanza tra HF è pari a

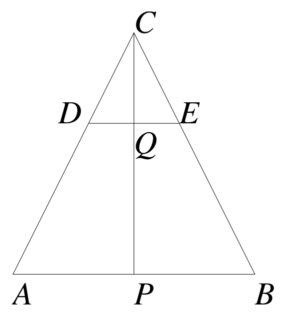
$$\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{cm}=\frac{\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}\,,$$

ma questa è anche la distanza di H da B. Analogamente, la distanza di H da G è pari alla distanza di H da B. Concludiamo che la circonferenza cercata è quella circoscritta al triangolo DBE e il suo raggio è $\frac{\sqrt{3}}{3}$ cm.
[Problema proposto da L. Tolomeo.]

24. La risposta è **(A)**.
Chiamiamo H e R l'altezza del cono e il raggio della sua base, espressi in metri, rispettivamente. Abbiamo che

$$\frac{\pi R^2\,H}{3}=1\,\mathrm{m}^3\,.$$

Il triangolo ABC in figura rappresenta la sezione del cono di partenza, fatta con un piano contenente il suo asse.



Quindi l'altezza CP di ABC misura H e il segmento AP misura R. Scegliamo ora Q su CP in modo che CQ sia un quarto di CP, e siano D ed E le intersezioni della retta per Q parallela ad AB, con AC e BC. I triangoli ABC e DEC sono simili, quindi poichè il rapporto tra CQ e CP è un quarto, lo stesso vale il rapporto tra DQ e AP:

$$CQ=\frac{H}{4}\,,\quad DQ=\frac{R}{4}\,.$$

D'altra parte, CQ e DQ sono rispettivamente l'altezza e il raggio di base del cono di cui vogliamo calcolare il volume V. Dunque il volume cercato è

$$V=\frac{\pi\left(\frac{R}{4}\right)^2\frac{H}{4}}{3}=\frac{1}{64}\frac{\pi R^2\,H}{3}=\frac{1}{64}\,\mathrm{m}^3\,.$$

[Problema proposto da un gruppo di studenti di Parma]

25. La risposta è D
La probabilità che Danilo entri per primo negli spogliatoi è $\frac{1}{11}$, e questa è anche la probabilità che egli entri per secondo, per terzo, e più in generale che entri come l'n–esimo giocatore, per ogni n compreso tra 1 e 11.

Se entra per primo sicuramente prenderà la maglia numero 8. Se entra per secondo, il giocatore che è entrato per primo avrà preso la maglia numero 8 con probabilità $\frac{1}{11}$ e quindi con probabilità $\frac{10}{11}$ la prenderà Danilo. Quindi la probabilità che Danilo entri per secondo e prenda la maglia numero 8 è:

$$\frac{1}{11} \cdot \frac{10}{11} = \frac{10}{121} \, .$$

Supponiamo che Danilo entri nello spogliatoio per terzo. La probabilità che uno dei due giocatori che lo hanno precededuto abbiano preso la maglia numero 8 è $\frac{2}{11}$ e quindi la probabilità che Danilo prenda la maglia numero 8 è $\frac{9}{11}$. Quindi la probabilità che Danilo prenda la maglia numero 8 essendo entrato per terzo è

$$\frac{1}{11} \cdot \frac{9}{11} = \frac{9}{121} \, .$$

Allo stesso modo si trova che la probabilità che Danilo prenda la maglia numero 8 entrando con n–esimo giocatore nello spogliatoio è

$$\frac{1}{11} \cdot \frac{12-n}{11} = \frac{12-n}{121} \, ,$$

per ogni valore $n = 1, 2, 3, \ldots, 11$. Per trovare la pobabilità complessiva P che Danilo prenda la maglia numero 8 dobbiamo sommare il valore appena trovato su tutti i valori di n da 1 a 11:

$$P = \frac{11}{121} + \frac{10}{121} + \frac{9}{121} + \cdots + \frac{2}{121} + \frac{1}{121} = \frac{1}{121}(1 + 2 + 3 + \cdots + 11) = \frac{6}{11} \, .$$

[Problema proposto da F. Poloni]