INSIEME DEI NUMERI RAZIONALI

Nell'insieme N dei numeri naturali l'operazione di divisione non è sempre possibile, ad esempio non è possibile fare 11 diviso 3 in quanto non si ottiene un numero naturale.

La scrittura $\frac{11}{3}$ rappresenta un numero razionale che è quindi individuato da

una coppia ordinata di numeri naturali (11; 3) che ha come primo componente il numeratore (11) e come secondo componente il denominatore (3) ricordando che il denominatore non potrà mai essere 0.

Consideriamo due coppie ordinate (a; b) e (c; d) appartenenti all'insieme NxN dove N è l'insieme dei numeri naturali escluso lo 0.
In questo insieme introduciamo una relazione di proporzionalità, che associa alla coppia (a; b) la coppia (c; d) se e soltanto se a x d = b x c.
Ad esempio la coppia (26; 8) è in relazione con la coppia (13; 4) e con la coppia (52; 16).
Questa relazione di proporzionalità è una relazione di equivalenza. Infatti:

1) è riflessiva: (a; b) R (a; b) perché a x b = b x a;

2) è simmetrica: se (a; b) R (c; d) cioè a x d = b x c allora (c; d) R (a; b) in quanto c x b = d x a;

3) è transitiva: se (a; b) R (c; d) cioè a x d = b x c

e (c; d) R (e; f) cioè c x f = d x e

segue, moltiplicando membro a membro

a x d x c x f = b x c x d x e

e dividendo per c x d si ottiene

a x f = b x e

da cui (a; b) R (e; f)

Pertanto se (a; b) R (c; d) e (c; d) R (e; f) segue che (a; b) R (e; f).

Si può ora costruire l'insieme quoziente i cui elementi sono le classi di coppie ordinate tra loro proporzionali.
La scrittura [(a; b)] rappresenta l'intera classe di coppie proporzionali alla coppia (a; b), che è la coppia rappresentante della classe.
E' chiaro che come rappresentante si può prendere una qualunque delle altre coppie appartenenti alla classe.
Questo insieme quoziente prende il nome di insieme dei numeri razionali e si indica con Q.
Quindi Q rappresenta l'insieme delle classi di coppie ordinate di numeri naturali (a; b) ; (c; d) ; (e; f) .... dove a, c, e .... appartengono a N mentre b, d, f .... appartengono a N. Tali coppie ordinate sono espresse dalle scritture

$$\frac{a}{b} \quad \frac{c}{d} \quad \frac{e}{f} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

che prendono il nome di frazioni.

Nella scrittura $\frac{a}{b}$ (equivalente ad a : b), il primo numero a, che rappresenta il dividendo, prende il nome di numeratore, mentre b (che è il divisore) prende il nome di denominatore.

Quando a è multiplo di b il risultato dell'operazione espressa dalla frazione è un numero naturale appartenente a N, in caso contrario, la frazione rappresenta una nuova entità numerica che fa parte dell'insieme Q.

Le frazioni con numeratore minore del denominatore sono minori di 1 e si dicono frazioni proprie.

Le frazioni con numeratore maggiore del denominatore sono maggiori di 1 e si dicono frazioni improprie.

Le frazioni con numeratore uguale o multiplo del denominatore sono uguali a 1 oppure sono numeri naturali e si dicono frazioni apparenti.

Date due frazioni con uguale denominatore, la maggiore delle due è quella con numeratore maggiore.
Date due frazioni con uguale numeratore, la maggiore delle due è quella con il denominatore minore.
Pertanto per confrontare due frazioni è necessario portarle allo stesso denominatore oppure allo stesso numeratore.