1

L'insieme N dei numeri naturali

Per introdurre l'insieme N occorre prima definire gli insiemi equipotenti.

Due insiemi I *e* I' *si dicono equipotenti quando esiste una corrispondenza biunivoca fra i loro elementi.*

Si scrive allora:

$$I \equiv I'$$

E' facile provare che, considerato un insieme A di più insiemi finiti, se fra essi si può stabilire una *relazione di equipotenza,* questa è una *relazione di equivalenza* poiché gode delle proprietà riflessiva, simmetrica e transitiva.

E' allora possibile dividere A in classi di equivalenza di insiemi equipotenti fra loro; applicando il "principio di contrazione", ossia considerando queste classi come elementi di un nuovo insieme, detto insieme quoziente, si perviene al concetto di numero naturale.

Un **numero naturale** è *una classe di equivalenza di insiemi equipotenti.*

Ciò significa che a ciascuna classe di insiemi equipotenti [I]; [I']; [I"]; ... viene associato un numero naturale *m; n; p ...* che esprime quanti elementi ha ogni insieme di quella classe.

Si scrive allora

$|I| = m$ $|I'| = n$ $|I''| = p$

e si legge: *m* e il numero di elementi di I, *n* di I', *p* di I", ecc.

I numeri naturali costituiscono l'insieme a tutti noto

$$N = \{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ ...\}$$

(a) *Due numeri naturali* m *ed* n *sono* **uguali** *se corrispondono ad insiemi equipotenti.*

Si scrive

$$m = n$$

(b) *Due numeri naturali* m *ed n sono* **disuguali** *se corrispondono ad insiemi non equipotenti.*

Si scrive

$$m \neq n$$

(c) *Dati due numeri naturali* m *ed* n *disuguali fra loro, si dice che* m *è* **minore** *di* n *e si scrive*

$$m < n$$

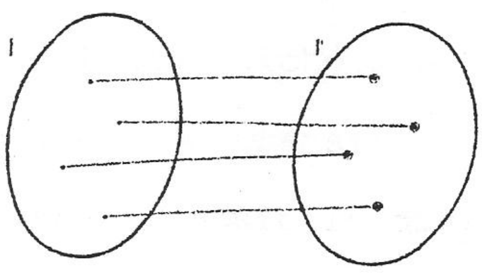
quando l'insieme I *cui corrisponde* m *è equipotente ad un sottoinsieme proprio* J' *dell'insieme* I' *cui corrisponde* n.

(d) *Dati due numeri naturali* m *ed* n *disuguali fra loro, si dice che* m *è* **maggiore** *di* n *e si scrive*

$$m > n$$

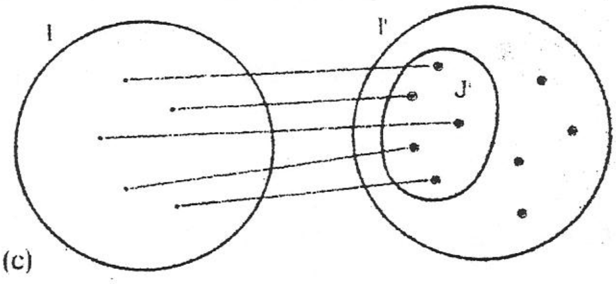
quando l'insieme I *cui corrisponde* m *include come sottoinsieme proprio un insieme* J *equipotente a* I' *cui corrisponde* n.

Riportiamo un diagramma per i casi (a), (c) e (d).



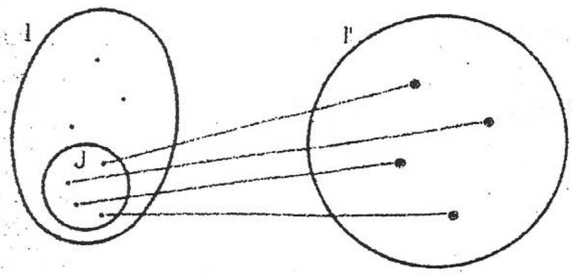
(a)

Fra I e I' esiste una corrispondenza biunivoca; essi sono pertanto equipotenti: $I \equiv I'$.
Da $|I| = m$ e $|I'| = n$ consegue $m = n$



(c)

Non esiste corrispondenza biunivoca fra I e I', bensì fra I e J' (sottoinsieme proprio di I': $J' \subset I'$); cioè $I \equiv J'$.
Da $|I| = m$ e $|I'| = n$ consegue $m < n$



(d)

Non esiste corrispondenza biunivoca fra I e I', bensì fra J (sottoinsieme proprio di I: $J \subset I$) e I'; cioè $J \equiv I'$.
Da $|I| = m$ e $|I'| = n$ consegue $m > n$