

*I Giochi di Archimede - Gara Biennio*

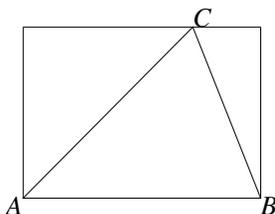
22 novembre 2011

- 1) La prova consiste di 20 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
- 2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
- 3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
- 4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore.** Buon lavoro e buon divertimento.

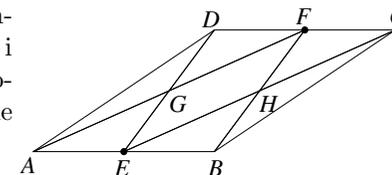
Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Classe \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	

- 1) Quanti sono i numeri di 6 cifre, formati dalle cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, divisibili per 1, 2, 3, 4, 5, 6?  
(A) Nessuno, (B) 1, (C) 18, (D) 120, (E) 360.
- 2) Cangrande von Rottweiler, noto cambiavalute, oggi ha scambiato 2 Baiocchi per 3 Doblioni e 2 Doblioni per 1 Baiocco e 3 Carlini. Quanti Carlini servono per fare un Baiocco?  
(A) 6, (B) 9, (C) 10, (D) 12, (E) non è possibile stabilirlo.
- 3) Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo. Costruiamo un rettangolo che abbia un lato coincidente con  $AB$  e contenga il punto  $C$  sul lato opposto ad  $AB$ . Facciamo la stessa costruzione partendo dal lato  $BC$  e dal lato  $CA$ , ottenendo così tre rettangoli. Allora sicuramente i tre rettangoli hanno:  
(A) perimetri uguali, (B) aree uguali, (C) somma delle lunghezze delle diagonali uguali, (D) uguale rapporto tra lato maggiore e lato minore, (E) nessuna delle precedenti affermazioni è sicuramente vera.



- 4) Il piccolo Gianguauss legge sul suo libro di Latino “ $XV = 15$ ”; allora si chiede: “Quante sono le coppie ordinate distinte  $(X, V)$  di numeri interi (eventualmente negativi), il cui prodotto è uguale a 15?” ( $(2, -1)$  e  $(-1, 2)$  sono, ad esempio, due coppie ordinate distinte di numeri interi). Qual è la risposta corretta?  
(A) 1, (B) 2, (C) 4, (D) 6, (E) 8.
- 5) Su ogni vertice di una piramide a base quadrata è scritto un numero, che può essere 1, 2 oppure 3, in modo che per ogni faccia (inclusa la base) la somma dei numeri scritti sui suoi vertici sia divisibile per tre. Sapendo che i numeri non sono tutti uguali a 3, quanto vale la somma di tutti i numeri scritti sui vertici?  
(A) 6, (B) 8, (C) 9, (D) 12, (E) 14.
- 6) In un parallelogramma di area  $1 \text{ m}^2$  le lunghezze di due lati consecutivi sono una il doppio dell'altra. Inoltre uno degli angoli interni misura  $60^\circ$ . Quanto misura la diagonale minore?  
(A)  $\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ m}$ , (B)  $\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$ , (C)  $1 \text{ m}$ , (D)  $\frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ m}$ , (E)  $\sqrt{3} \text{ m}$ .
- 7) Alla Grande Cena delle Olimpiadi, che si tiene ogni anno durante la manifestazione di Cesenatico, ci sono vari primi e vari secondi piatti. L'anno scorso c'erano 60 modi di scegliere un pasto (ovvero un primo e un secondo). Quest'anno verranno aggiunti dei primi, e ci saranno 68 modi di scegliere un pasto. Quanti primi c'erano, come minimo, lo scorso anno? [Nello scegliere un pasto è possibile abbinare qualsiasi primo a qualsiasi secondo].  
(A) 4, (B) 8, (C) 10, (D) 12, (E) 15.
- 8) Filippo scrive dei numeri sul quaderno. Inizialmente scrive 2; poi, per scrivere un nuovo numero prende l'ultimo numero che ha scritto e gli applica nell'ordine le seguenti operazioni: divide per due, somma due, moltiplica per due, sottrae due. Quanti numeri avrà scritto dopo che avrà annotato il primo numero di quattro cifre?  
(A) 1000, (B) 998, (C) 500, (D) 10, (E) nessuna delle precedenti.
- 9) Nel parallelogramma  $ABCD$  in figura il segmento  $BD$  è perpendicolare ad  $AB$  ed  $E$  e  $F$  sono i punti medi di  $AB$  e  $CD$  rispettivamente. Calcolare l'area del quadrilatero  $GEHF$ , sapendo che  $AB = 5 \text{ cm}$  e  $BD = 2 \text{ cm}$ .  
(A)  $\frac{15}{8} \text{ cm}^2$ , (B)  $2 \text{ cm}^2$ , (C)  $\frac{9}{4} \text{ cm}^2$ ,  
(D)  $\frac{5}{2} \text{ cm}^2$ , (E)  $3 \text{ cm}^2$ .
- 10) Un numero si dice palindromo se la sequenza delle sue cifre non cambia che la si legga da sinistra a destra o da destra a sinistra; ad esempio 36563 è palindromo. Quanti sono i numeri palindromi di 5 cifre tali che la somma delle loro cifre sia



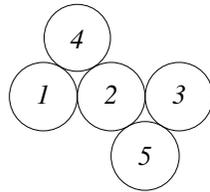
pari?

(A) 450, (B) 550, (C) 700, (D) 900, (E) 1000.

- 11) Gabriella scrive una successione di 10 numeri (eventualmente negativi), in modo che ciascun numero della successione, dal terzo in poi, sia la somma dei due che lo precedono. Il primo numero della successione è 34 mentre l'ultimo è 0. Quanto vale la somma di tutti i numeri della successione?

(A) -34, (B) 0, (C) 22, (D) 68, (E) 88.

- 12) Cinque monete di raggio 1 cm, numerate da 1 a 5, sono disposte su un tavolo come indicato nella figura; i centri delle monete 1, 2 e 3 sono allineati. Si costruisce un quadrilatero che contiene tutte le monete, con un lato tangente alle monete 1 e 5, uno alle monete 5 e 3, uno alle monete 3 e 4 e uno alle monete 4 e 1. Quanto vale l'area del quadrilatero?



(A)  $(2\sqrt{3} + 2) \text{ cm}^2$ , (B)  $(4\sqrt{3} + 4) \text{ cm}^2$ , (C)  $8\sqrt{3} \text{ cm}^2$ ,  
(D)  $(8\sqrt{3} + 8) \text{ cm}^2$ , (E)  $20 \text{ cm}^2$ .

- 13) Dopo una rissa in campo l'arbitro vuole espellere il capitano di una squadra di calcio. È uno tra Paolo, Andrea e Gabriele ma, siccome nessuno ha la fascia al braccio, non sa qual è dei tre. Paolo dice di non essere il capitano; Andrea dice che il capitano è Gabriele; Gabriele dice che il capitano è uno degli altri due. Sapendo che uno solo dei tre dice la verità, quale delle affermazioni seguenti è sicuramente vera?

(A) Gabriele non è il capitano, (B) Andrea dice la verità, (C) Paolo dice la verità, (D) Andrea è il capitano, (E) Gabriele mente.

- 14) Sapendo che  $a$  e  $b$  sono due numeri reali positivi tali che  $a^2(a - 3b) = b^2(b - 3a)$ , quanti valori diversi può assumere il rapporto  $\frac{a}{b}$ ?

(A) 0, (B) 1, (C) 3, (D) 5, (E) infiniti.

- 15) Marta ha scritto sulla lavagna un numero intero pari. Per 12 volte Marta sostituisce il numero scritto sulla lavagna con il suo quadrato aumentato di 5. Con quali cifre può terminare il numero che si trova scritto sulla lavagna alla fine dei calcoli di Marta?

(A) 0 oppure 4, (B) 0, 4 oppure 6, (C) 0 oppure 6, (D) 4 oppure 6,  
(E) può terminare con una qualsiasi cifra pari.

- 16) In ogni casella di una scacchiera di 8 righe per 8 colonne è scritto un numero intero. Le righe e le colonne della scacchiera sono numerate da 1 a 8, e la casella che sta nella riga 1 e nella colonna 1 è nera. La somma dei numeri scritti nelle caselle bianche è 28, mentre la somma dei numeri scritti nelle colonne dispari è 47. Se cambiamo il segno a tutti i numeri che si trovano nelle caselle bianche, quanto diventa la somma dei numeri che si trovano nelle righe dispari?

(A) -14, (B) 19, (C) 33, (D) 75, (E) i dati non sono sufficienti a determinarlo.

- 17) Marco sta per colorare i vertici di una griglia quadrata formata da 100 quadratini di lato 1 cm, usando solo tre colori, secondo un criterio che il suo amico Dino non conosce. Prima che lo faccia, Dino vuole disegnare una circonferenza con centro nel vertice centrale della griglia, di raggio minore possibile, in modo da essere sicuro che essa conterrà almeno tre vertici dello stesso colore. Quanto misura il raggio della circonferenza che Dino deve tracciare? [I vertici possono stare sulla circonferenza o al suo interno.]

(A) 1 cm, (B) 2 cm, (C)  $\sqrt{2}$  cm, (D)  $\frac{3}{2}$  cm, (E)  $2\sqrt{2}$  cm.

- 18) Un triangolo rettangolo ha un cateto lungo 40 cm e il raggio del cerchio inscritto misura 10 cm. Quanto misura l'ipotenusa?

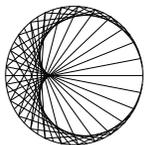
(A)  $10\sqrt{3}$  cm, (B) 40 cm, (C)  $20\sqrt{5}$  cm, (D) 50 cm, (E) 60 cm.

- 19) In una sequenza di 2011 numeri, il primo è 1 e il secondo è 0; ogni altro termine, è uguale alla differenza dei due termini precedenti: il terzo termine è il secondo meno il primo, il quarto è il terzo meno il secondo, e così via. Quanto vale l'ultimo termine della sequenza?

(A) -2010, (B) -1, (C) 0, (D) 1, (E) 2011.

- 20) Un re occupa una casella di una scacchiera illimitata in ogni direzione. Quante sono le possibili caselle in cui può trovarsi dopo aver fatto cinque mosse, sapendo che non è passato mai due volte sulla stessa casella? [Quando fa una mossa, il re si sposta in una qualsiasi delle otto caselle che hanno almeno un vertice in comune con la casella in cui si trova.]

(A) 40, (B) 80, (C) 99, (D) 100, (E) 120.



*I Giochi di Archimede - Gara Triennio*

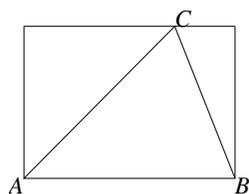
22 novembre 2011

- 1) La prova consiste di 25 problemi; ogni domanda è seguita da cinque risposte indicate con le lettere A, B, C, D, E.
- 2) Una sola di queste risposte è corretta, le altre 4 sono errate. Ogni risposta corretta vale 5 punti, ogni risposta sbagliata vale 0 punti e ogni problema lasciato senza risposta vale 1 punto.
- 3) Per ciascuno dei problemi devi trascrivere la lettera corrispondente alla risposta che ritieni corretta nella griglia riportata qui sotto. Non sono ammesse cancellature o correzioni sulla griglia. NON È CONSENTITO L'USO DI ALCUN TIPO DI CALCOLATRICE.
- 4) **Il tempo totale che hai a disposizione per svolgere la prova è di due ore.** Buon lavoro e buon divertimento.

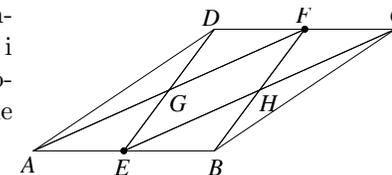
Nome \_\_\_\_\_ Cognome \_\_\_\_\_ Classe \_\_\_\_\_

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	

- 1) Quanti sono i numeri di 6 cifre, formati dalle cifre 1, 2, 3, 4, 5, 6, divisibili per 1, 2, 3, 4, 5, 6?  
(A) Nessuno, (B) 1, (C) 18, (D) 120, (E) 360.
- 2) Sia  $ABC$  un triangolo acutangolo. Costruiamo un rettangolo che abbia un lato coincidente con  $AB$  e contenga il punto  $C$  sul lato opposto ad  $AB$ . Facciamo la stessa costruzione partendo dal lato  $BC$  e dal lato  $CA$ , ottenendo così tre rettangoli. Allora sicuramente i tre rettangoli hanno:  
(A) perimetri uguali, (B) aree uguali, (C) somma delle lunghezze delle diagonali uguali, (D) uguale rapporto tra lato maggiore e lato minore, (E) nessuna delle precedenti affermazioni è sicuramente vera.
- 3) Su ogni vertice di una piramide a base ottagonale è scritto un numero, che può essere 1, 2 oppure 3, in modo che per ogni faccia (inclusa la base) la somma dei numeri scritti sui suoi vertici sia divisibile per tre. Sapendo che i numeri non sono tutti uguali a 3, quanto vale la somma di tutti i numeri scritti sui vertici?  
(A) 12, (B) 14, (C) 15, (D) 18, (E) 21.



- 4)  $m$  e  $n$  sono due numeri interi positivi, tali che  $m - n = 7$ . Quanti sono i valori compresi tra 0 e 2011 (estremi inclusi) che possono essere assunti da  $m + 5n$ ?  
(A) 6, (B) 334, (C) 670, (D) 1005, (E) 2012.
- 5) Alla Grande Cena delle Olimpiadi, che si tiene ogni anno durante la manifestazione di Cesenatico, ci sono vari primi e vari secondi piatti. L'anno scorso c'erano 60 modi di scegliere un pasto (ovvero un primo e un secondo). Quest'anno verranno aggiunti dei primi, e ci saranno 68 modi di scegliere un pasto. Quanti primi c'erano, come minimo, lo scorso anno? [Nello scegliere un pasto è possibile abbinare qualsiasi primo a qualsiasi secondo.]  
(A) 4, (B) 8, (C) 10, (D) 12, (E) 15.
- 6) Nel parallelogramma  $ABCD$  in figura il segmento  $BD$  è perpendicolare ad  $AB$  ed  $E$  e  $F$  sono i punti medi di  $AB$  e  $CD$  rispettivamente. Calcolare l'area del quadrilatero  $GEHF$ , sapendo che  $AB = 5$  cm e  $BD = 2$  cm.  
(A)  $\frac{15}{8}$  cm<sup>2</sup>, (B) 2 cm<sup>2</sup>, (C)  $\frac{9}{4}$  cm<sup>2</sup>,  
(D)  $\frac{5}{2}$  cm<sup>2</sup>, (E) 3 cm<sup>2</sup>.
- 7) Un numero si dice palindromo se la sequenza delle sue cifre non cambia che la si legga da sinistra a destra o da destra a sinistra; ad esempio 36563 è palindromo. Quanti sono i numeri palindromi di 5 cifre tali che la somma delle loro cifre sia pari?  
(A) 450, (B) 550, (C) 700, (D) 900, (E) 1000.
- 8) Gabriella scrive una successione di 10 numeri (eventualmente negativi), in modo che ciascun numero della successione, dal terzo in poi, sia la somma dei due che lo precedono. Il primo numero della successione è 34 mentre l'ultimo è 0. Quanto vale la somma di tutti i numeri della successione?  
(A) -34, (B) 0, (C) 22, (D) 68, (E) 88.
- 9) La media delle ampiezze degli angoli interni di un poligono è 175°. Quanti lati ha il poligono?  
(A) 18, (B) 25, (C) 60, (D) 72, (E) 80.
- 10)  $a$ ,  $b$  e  $c$  sono tre numeri reali, tutti diversi tra loro. Per quanti numeri reali  $x$ , al massimo, possono valere le uguaglianze:  $ax + b = bx + c = cx + a$ ?  
(A) Nessuno, (B) 1, (C) 3, (D) 4, (E) almeno 5.
- 11) Un canguro e una rana si trovano inizialmente sullo stesso vertice di un poligono regolare di 41 lati, e cominciano a fare dei salti. La rana salta sempre da un vertice a quello adiacente, in senso antiorario, mentre il canguro salta dal vertice in cui si trova a quello in cui c'è la rana. La sequenza dei salti è questa: la rana fa un



- salto, il canguro fa un salto; la rana fa due salti, il canguro fa un salto; la rana fa tre salti, il canguro fa un salto, e così via. Dopo che il canguro ha fatto 40 salti, quante volte è tornato sul vertice di partenza?  
**(A)** 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** 4.
- 12)** Diciamo che una coppia di numeri naturali  $(a, b)$  è *bella* se comunque si scelga una coppia di numeri naturali  $(c, d)$  tali che  $ab = cd$ , vale  $a + b = c + d$ . Quante sono le coppie belle?  
**(A)** Nessuna, **(B)** una, **(C)** cinque, **(D)** sette, **(E)** più di otto.
- 13)** Marta ha scritto sulla lavagna un numero intero pari. Per 12 volte Marta sostituisce il numero scritto sulla lavagna con il suo quadrato aumentato di 5. Con quali cifre può terminare il numero che si trova scritto sulla lavagna alla fine dei calcoli di Marta?  
**(A)** 0 oppure 4, **(B)** 0, 4 oppure 6, **(C)** 0 oppure 6, **(D)** 4 oppure 6, **(E)** può terminare con una qualsiasi cifra pari.
- 14)** In ogni casella di una scacchiera di 8 righe per 8 colonne è scritto un numero intero. Le righe e le colonne della scacchiera sono numerate da 1 a 8, e la casella che sta nella riga 1 e nella colonna 1 è nera. La somma dei numeri scritti nella caselle bianche è 28, mentre la somma dei numeri scritti nelle colonne dispari è 47. Se cambiamo il segno a tutti i numeri che si trovano nelle caselle bianche, quanto diventa la somma dei numeri che si trovano nelle righe dispari?  
**(A)**  $-14$ , **(B)** 19, **(C)** 33, **(D)** 75, **(E)** i dati non sono sufficienti a determinarlo.
- 15)** Ciascuno dei quattro amici Anna, Erica, Lorenzo e Giuseppe, mente sempre o dice sempre la verità. Anna dice: “Erica mente sempre”; Erica dice: “Giuseppe dice sempre il vero”; Giuseppe dice: “Anna mente sempre”; infine Lorenzo dice: “Anna, Erica e Giuseppe mentono sempre”. Quanti sono, al massimo, quelli che mentono sempre?  
**(A)** 1, **(B)** 2, **(C)** 3, **(D)** 4, **(E)** nessuna delle precedenti.
- 16)**  $ABC$  è un triangolo isoscele, con  $\overline{AB} = \overline{AC} = 10$  cm.  $D$  ed  $E$  sono due punti su  $AB$  e  $AC$  rispettivamente, entrambi distanti 6 cm da  $A$ , e  $H$  è il piede dell'altezza di  $ABC$  relativa a  $BC$ . Calcolare il rapporto tra le aree di  $ABC$  e di  $DHE$ .  
**(A)**  $\frac{25}{9}$ , **(B)**  $\frac{25}{12}$ , **(C)**  $\frac{10}{6}$ , **(D)**  $\frac{25}{6}$ , **(E)**  $\frac{9}{4}$ .
- 17)** Sapendo che l'equazione  $ax^2 - bx + c = 0$ , con  $a > 1$ , ha due soluzioni positive strettamente minori di 1, possiamo affermare sicuramente che:  
**(A)**  $c + b < 3a$ , **(B)**  $c \leq b < a$ , **(C)**  $b \leq c$ , **(D)**  $c \leq b < 2$ , **(E)**  $b < 2$  e  $c < a$ .
- 18)** Gabriella ha un grande dado a sei facce completamente bianco, tranne che per i numeri scritti sulle facce, e vuole colorare tutte le facce e tutti i vertici del dado, usando il rosso, il blu, il verde e il giallo, in modo che non ci siano due facce adiacenti (cioè con un lato in comune) con lo stesso colore e ogni vertice abbia colore diverso da tutte le facce a cui appartiene. In quanti modi diversi lo può fare?  
**(A)** 24 **(B)** 48, **(C)** 96, **(D)** 264, **(E)**  $4^6$ .
- 19)** Quante terne ordinate  $(p, q, r)$ , formate da numeri primi minori di 100, verificano  $p^2 + q^2 = r^2$ ? [1 non è un numero primo.]  
**(A)** 2, **(B)** 4, **(C)** 6, **(D)** 8, **(E)** 16.
- 20)** Nel quadrilatero  $ABCD$  le diagonali sono ortogonali tra loro e gli angoli in  $B$  e in  $D$  sono retti. Inoltre  $\overline{AB} = \overline{AD} = 20$  cm,  $\overline{BC} = \overline{CD} = 30$  cm. Calcolare il raggio della circonferenza inscritta in  $ABCD$ .  
**(A)** 15 cm, **(B)**  $5\sqrt{13}$  cm, **(C)** 10 cm, **(D)**  $6\sqrt{5}$  cm, **(E)** 12 cm.
- 21)** In un torneo ci sono 20 partecipanti. Ad ogni turno vengono estratti due tra i partecipanti ancora in gara, e questi disputano una partita. Ogni partecipante che sia stato sconfitto due volte viene eliminato e l'ultimo concorrente che resta vince. Sapendo che il vincitore non ha mai perso, quante partite si sono disputate in tutto?  
**(A)** 19, **(B)** 38, **(C)** 40, **(D)** 380, **(E)** non ci sono dati sufficienti.
- 22)** Su un foglio è disegnato il quadrato  $ABCD$ . Il foglio viene piegato (lungo una linea retta) in modo che  $B$  vada a coincidere con il punto medio di  $DC$ . Il lato  $BC$  viene diviso dalla piegatura in due segmenti di lunghezze  $a$  e  $b$ , con  $a \leq b$ . Quanto vale  $b/a$ ?  
**(A)** 2, **(B)** 1, **(C)**  $5/3$ , **(D)**  $25/9$ , **(E)**  $\sqrt{5}/2$ .
- 23)** La polizia indaga su una rapina. I cinque indagati, tra cui c'è sicuramente il colpevole e forse anche qualche suo complice, interrogati dichiarano: A: “B è colpevole. D è uno dei complici.” B: “E è innocente. A è uno dei complici.” C: “E è il colpevole. D è innocente.” D: “Il colpevole è effettivamente E. A è stato suo complice.” E: “A era uno dei complici. C è il colpevole.” Sapendo che il colpevole mente su tutto, gli eventuali complici, per paura, rendono una dichiarazione vera ed una falsa e le persone innocenti, infine, dicono sempre la verità, quanti sono i complici?  
**(A)** 0, **(B)** 1, **(C)** 2, **(D)** 3, **(E)** è impossibile determinarlo.
- 24)** Abbiamo una sequenza di 2011 numeri, di cui indichiamo con  $a_n$  il termine  $n$ -esimo. Sapendo che  $a_1 = 1$ , e che per ogni  $n \geq 2$ ,  $a_n = a_{n-1}(3n + 1)$ , trovare le ultime quattro cifre del termine  $a_{2011}$ .  
**(A)** 0000, **(B)** 3400, **(C)** 6000, **(D)** 6031, **(E)** 6034.
- 25)** Re Tal dei Tali si trova al centro di una scacchiera di tre righe e tre colonne. Quanti sono i possibili percorsi distinti di 3 mosse che Re Tal dei Tali può effettuare all'interno della scacchiera? [Quando fa una mossa, il re si sposta in una qualsiasi delle caselle che hanno in comune almeno un vertice con la casella in cui si trova.]  
**(A)** 36, **(B)** 54, **(C)** 84, **(D)** 121, **(E)** 168.