

Incontro n. 1

Noi contiamo

Liceo Matematico

Classe 4 Q

a.s. 2019/20

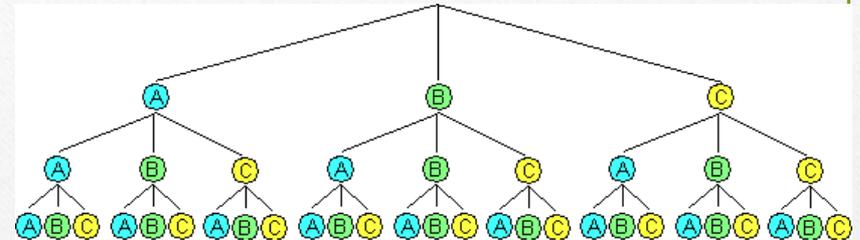
Calcolo combinatorio

Per mettere in ordine degli elementi appartenenti ad un insieme finito o per sceglierne alcuni, si pone il problema di quanti siano gli ordinamenti o le scelte possibili

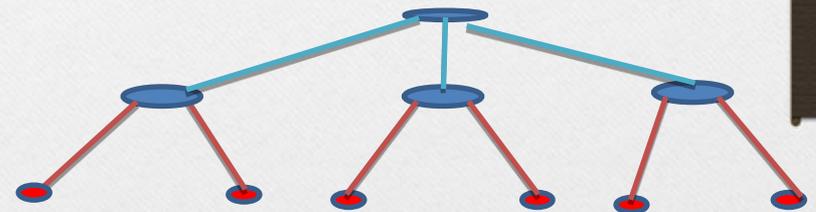


Contare le differenti possibilità

- Permutazioni P_n



- Disposizioni $D_{n,k}$



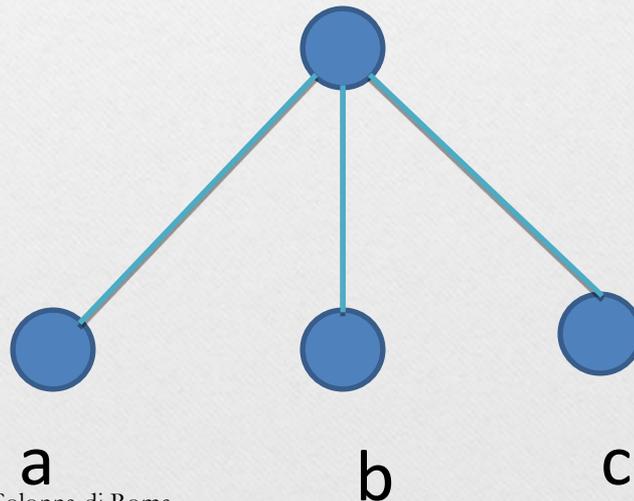
- Combinazioni $C_{n,k}$

0				1							
1			1		1						
2			1	2	1						
3			1	3	3	1					
4			1	4	6	4	1				
5			1	5	10	10	5	1			
6			1	6	15	20	15	6	1		
7			1	7	21	35	35	21	7	1	
8			1	8	28	56	70	56	28	8	1

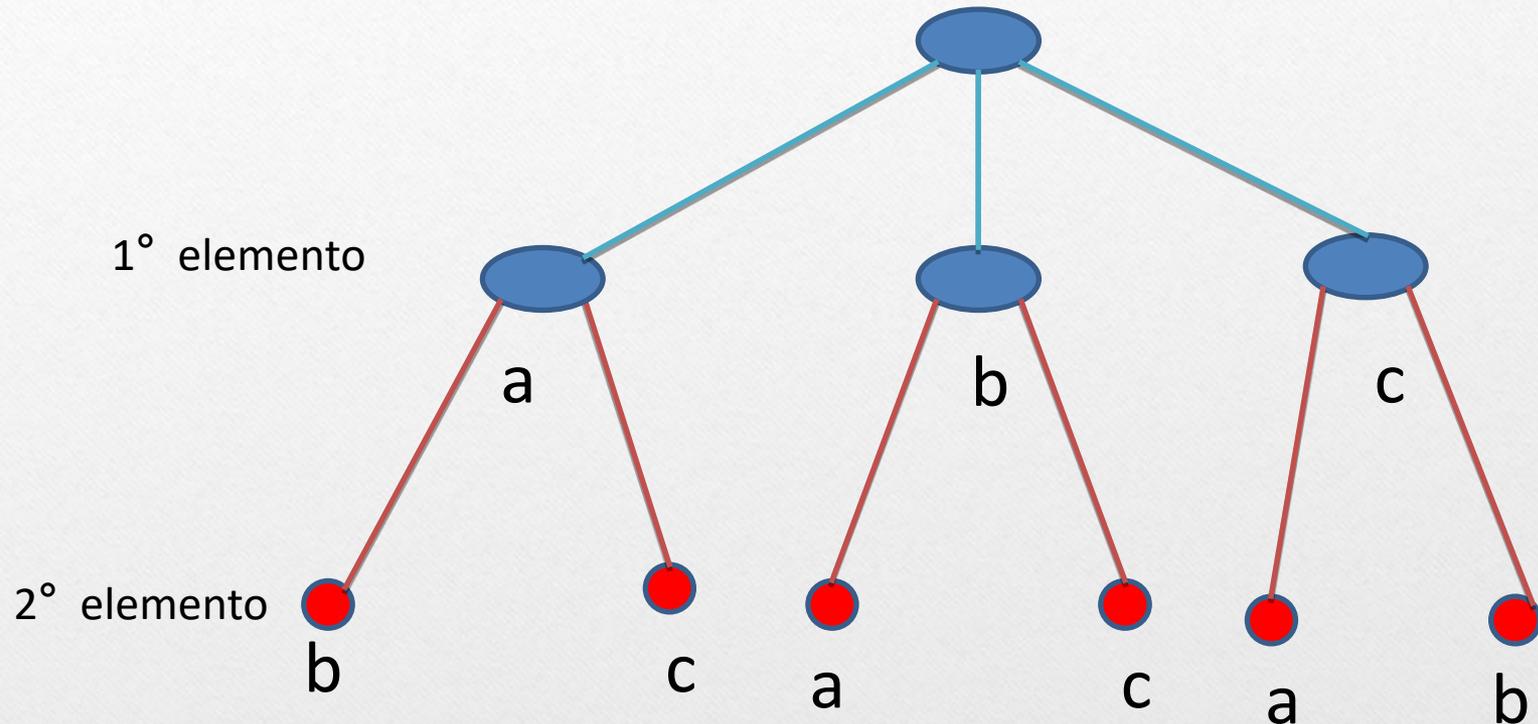
Gli alberi per rappresentare ordinamenti

Consideriamo un insieme A con $n=3$ elementi, vogliamo ordinare i suoi elementi $A = \{a,b,c\}$

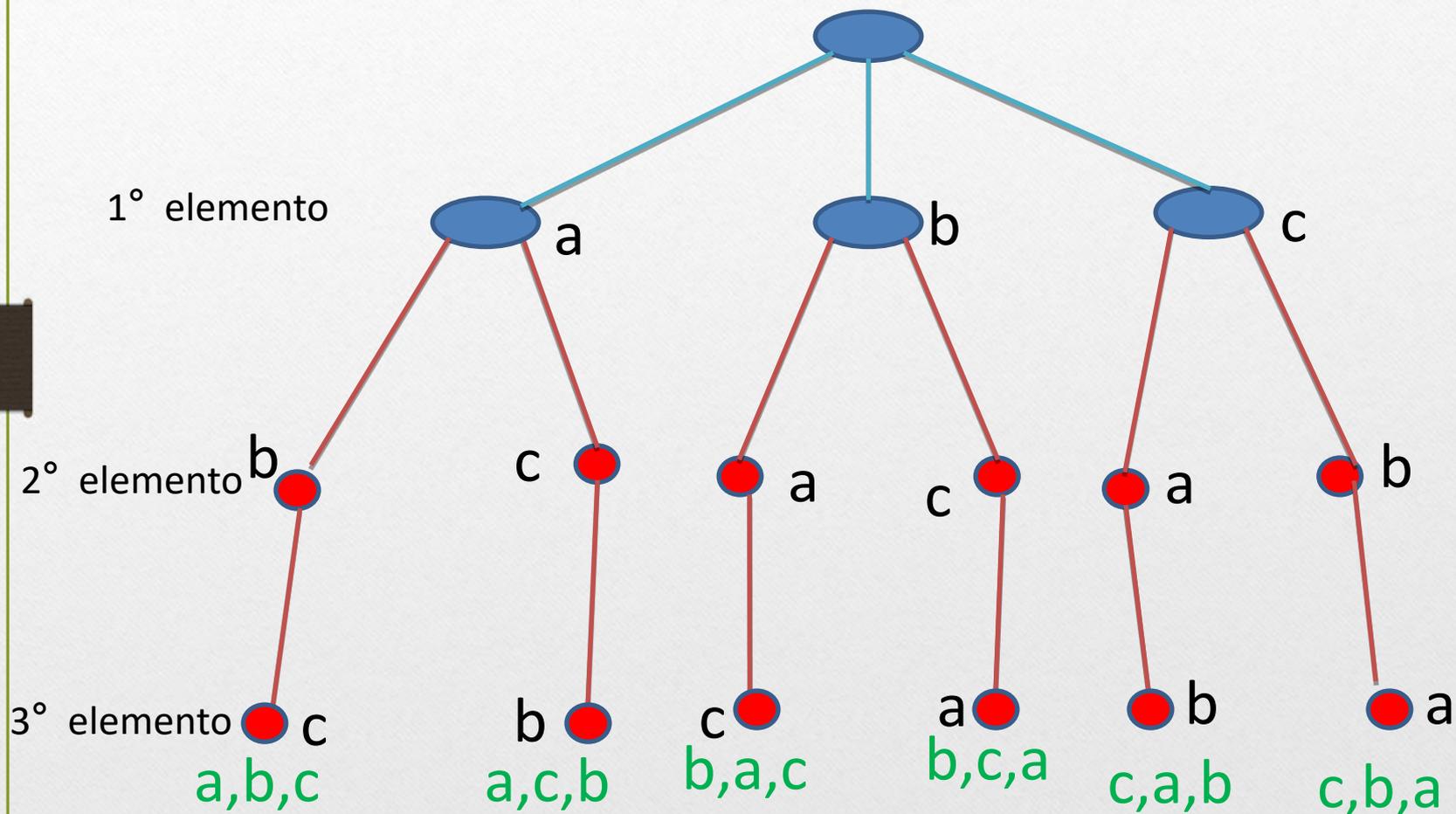
- Devo collocare il primo elemento, ho 3 scelte possibili



Ora devo collocare il secondo elemento, ho 2 scelte possibili



Devo collocare il terzo elemento, ho 1 sola possibilità



$$A = \{a, b, c\}$$

Permutazione

di $A = \{a, b, c\}$

- È ognuno degli **ordinamenti** che è possibile dare agli elementi dell'insieme A

a, b, c	b, a, c	c, a, b
a, c, b	b, c, a	c, b, a

$$P_3 = 6$$

Numero delle
permutazioni di 3
elementi

Permutazioni di n elementi

- Per contare quante siano le permutazioni di un insieme con n oggetti, si osservi che della configurazione possiamo scegliere
- il primo elemento n modi diversi (n rami),
- il secondo in $(n-1)$ ($n-1$ rami),
- il terzo in $(n-2)$ ($n-2$ rami), e così via sino
- all'ultimo che potrà essere preso in **un solo modo** essendo l'ultimo rimasto (1 ramo, scelta obbligata).

Permutazioni **semplici** di n elementi

Il numero delle permutazioni (**senza ripetizioni**) di n elementi è

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

$n!$ si legge n fattoriale

Poniamo per definizione

$$0! = 1$$

$$1! = 1$$

Provate a calcolare $3!$ e $4!$

Disposizioni $D_{n,k}$ di n elementi di classe k

- Supponiamo di avere 4 atleti che disputano una gara, quante possibilità abbiamo di assegnare la medaglia d'oro (primo posto) e quella d'argento (secondo posto) ?



a



b

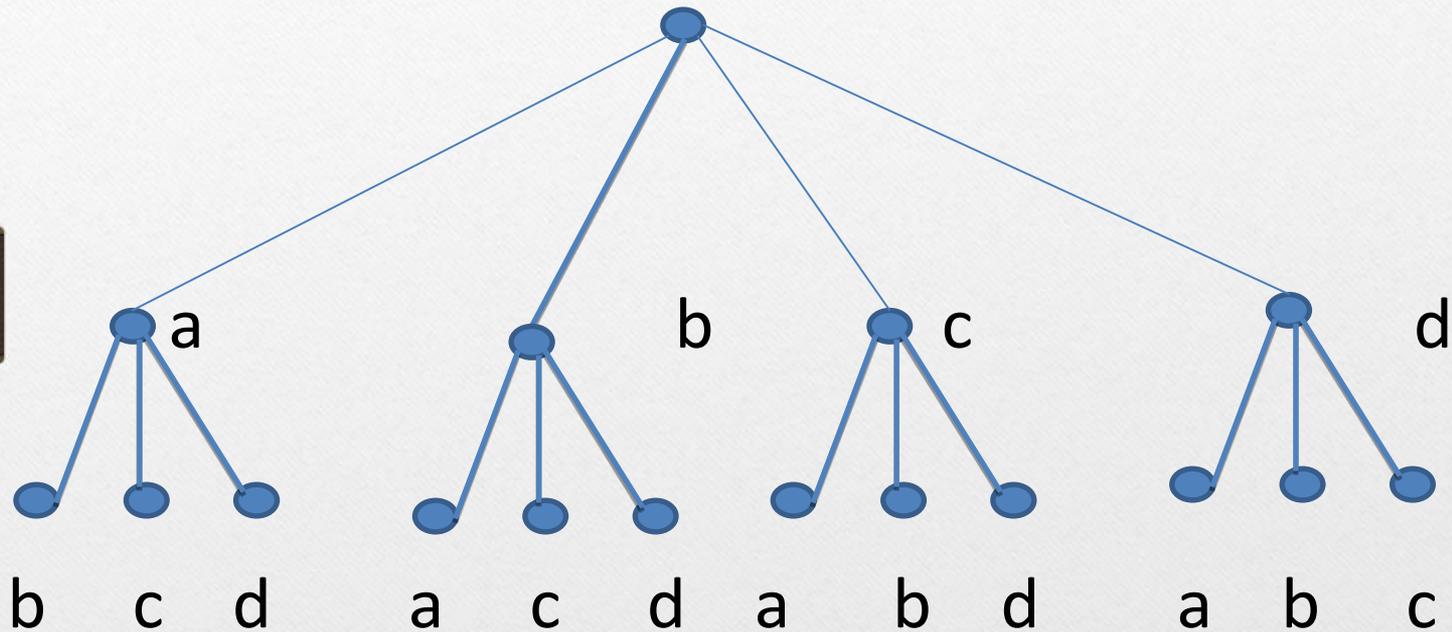


c



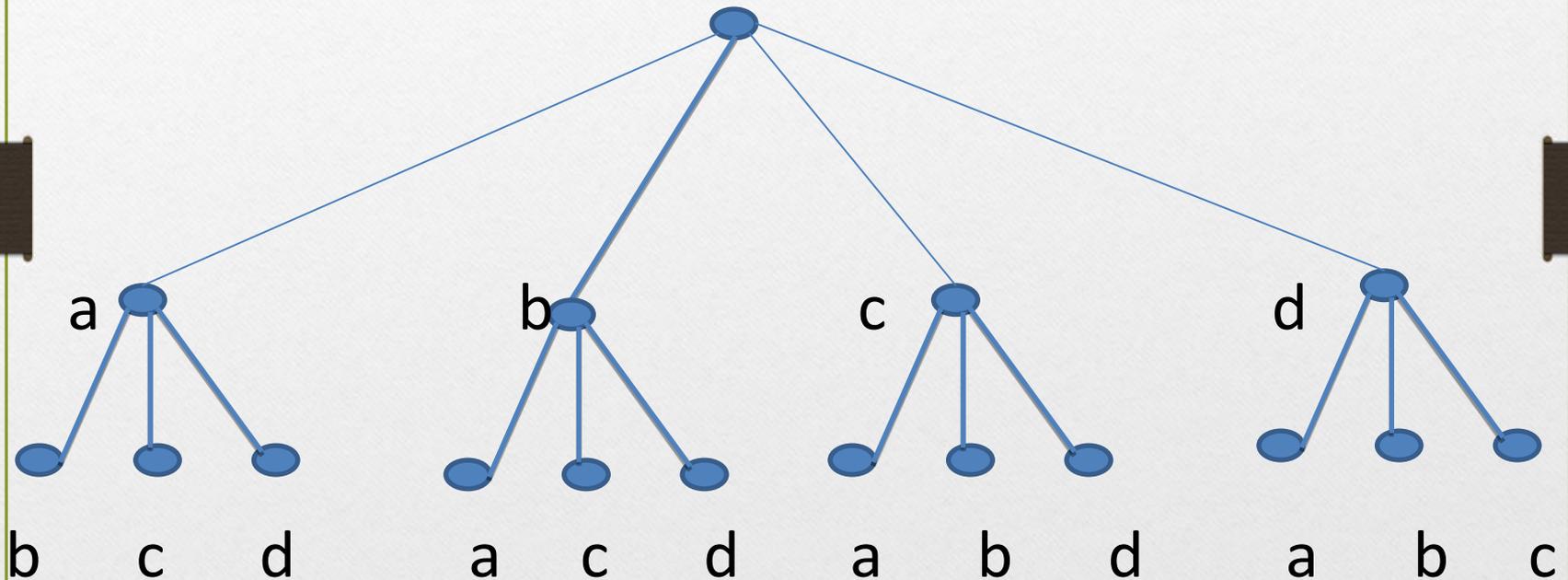
d

$D_{4,2}$: Disposizioni di 4 elementi di classe 2 (in 2 posti)



D_{4,2}

Abbiamo dunque $4 \cdot 3 = 12$ disposizioni differenti



Si dice **disposizione semplice** (senza ripetizioni) di **n elementi di classe k** ognuna delle scelte ordinate di k elementi (distinti tra loro) tra gli n disponibili.

CONSEGNA

Descrivete l'albero che rappresenta le disposizioni di 5 elementi in 2 posti. Quanti sono i nodi terminali?

$D_{5,3}$

$$D_{4,2} = 5 \cdot 4 = 20$$

Generalizzando abbiamo

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \dots \cdot [n-(k-1)]$$

Calcoliamo $D_{10,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

Infatti $k-1=2$

$[n-(k-1)] = 10-2=8$ (valore dell'ultimo fattore)

In pratica moltiplichiamo k ($=3$) fattori decrescenti, partendo da n ($=10$) e diminuendo sempre di 1.

♥ ♦ **Con le carte** ♣ ♠

Ho 4 assi, qual è la probabilità di estrarre prima l'asso di cuori e poi quello di fiori **senza aver rimesso nel mazzo** la prima carta estratta?

Risolvi con un grafo ad albero

Probabilità matematica

- $p = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$
- n. casi favorevoli = 1
- n. casi possibili = $D_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

$$p(A \heartsuit - A \clubsuit) = \frac{1}{4 \cdot 3} = \frac{1}{12}$$



riproviamoci



Ho 4 assi, qual è la probabilità di estrarre
prima l'asso di cuori e poi quello di fiori
dopo aver rimesso nel mazzo la prima carta
estratta?

Risolvi con un grafo ad albero

Risolviamo

- $P = \frac{\text{numero casi favorevoli}}{\text{numero casi possibili}}$
- n. casi favorevoli = 1
- n. casi possibili = $D'_{4,2} = 4 \cdot 4 = 4^2 = 16$

$$P(A \heartsuit - A \clubsuit) = \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16}$$

$D'_{n,k}$ Disposizioni con ripetizioni

Le abbiamo quando dati n elementi ne dobbiamo posizionare k anche ripetendo più volte gli elementi già scelti.

Esempio: qual è la probabilità di ottenere 3 volte di seguito 6 lanciando un dado?



Qual è la probabilità di

- **Estrarre una pallina rossa da un'urna con 5 palline rosse, 5 bianche e 5 nere?**

- **Estrarre una pallina rossa da un'urna con 5 palline rosse, 3 bianche e 2 nere?**

Nel mio cassetto dei calzini ho

- 10 calzini **rossi**
 - 10 calzini **verdi**
 - 10 calzini **blu**
- Se mi alzo e al buio devo prendere i calzini, quanti devo prenderne per essere sicura di averne 2 dello stesso colore?



Contare le differenti possibilità

- Permutazioni

$$P_n = n!$$

- Disposizioni $D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$

Semplici

- Disposizioni

$$D'_{n,k} = n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$$

Con ripetizioni

Incontro n. 2

Noi contiamo

Liceo Matematico

Classe 4 Q

a.s. 2019/20

Calcolo combinatorio

Per mettere in ordine degli elementi appartenenti ad un insieme finito o per sceglierne alcuni, si pone il problema di quanti siano gli ordinamenti o le scelte possibili



Contare le differenti possibilità

- P_n numero di Permutazioni semplici
- $P_n^{h,k,\dots}$ numero di Permutazioni con ripetizioni (h, k, ...)
- $D_{n,k}$ numero di Disposizioni semplici
- $D'_{n,k}$ numero di Disposizioni con ripetizioni
- $C_{n,k}$ numero di Combinazioni semplici
- $C'_{n,k}$ numero di Combinazioni con ripetizioni

Contare le differenti possibilità

Permutazioni

- Semplici $P_n = n!$

- Con ripetizioni $P_n^{(h,k,\dots)} = \frac{n!}{h! \cdot k! \cdot \dots}$

Disposizioni

- Semplici $D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$

- Con ripetizioni $D'_{n,k} = n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$

Il problema di Monty Hall

rivisto
Le tre scatole

In una scatola c'è un diamante,
nelle altre due una biglia di vetro.

Il giocatore sceglie una delle 3 scatole



© www.123rf.com

Il conduttore, che sa qual è quella vincente,
ne apre una vuota tra le 2 rimanenti



© www.123rf.com



A questo punto si deve scegliere

- Conviene cambiare



- Conviene tenersi la prima scatola scelta?



Calcoliamo le probabilità

$$P=2/3$$



$$P=1/3$$



Calcoliamo le probabilità

$$P=2/3$$



$$P=1/3$$



Cosa conviene fare?

- Cambio?
Ma certo che Cambio!!!



© www.123f.com

$$\frac{2}{3} > \frac{1}{3}$$

Liceo Matematico al Vittoria Colonna di Roma

- Non cambio?





Il problema di Monty Hall



Ci sono 3 porte, dietro ad una di esse c'è una macchina in premio, dietro le altre due una capra.

Il giocatore sceglie una porta, o la 1, o la 2 o la 3.

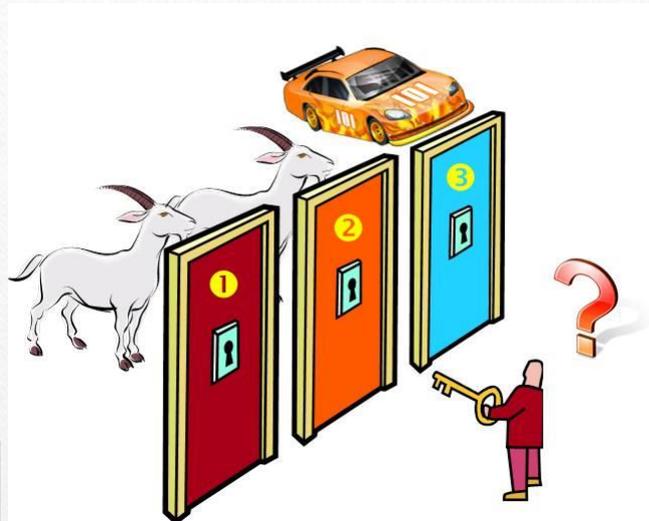
Il conduttore apre una delle due rimanenti che non cela la macchina.

Poi chiede al giocatore se sia ancora sicuro della sua scelta o se preferisca cambiare.

**TU CHE
FARESTI?**



Il problema di Monty Hall

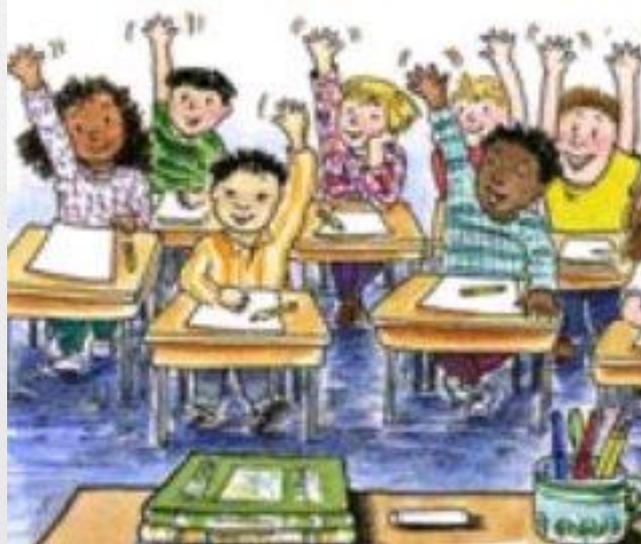


Ci sono 3 porte, dietro ad una di esse c'è una macchina in premio, dietro le altre due una capra. Il giocatore sceglie una porta, la 1, la 2 o la 3. Il conduttore apre una delle due rimanenti che non cela la macchina. Poi chiede al giocatore se sia ancora sicuro della sua scelta o se preferisca cambiare.

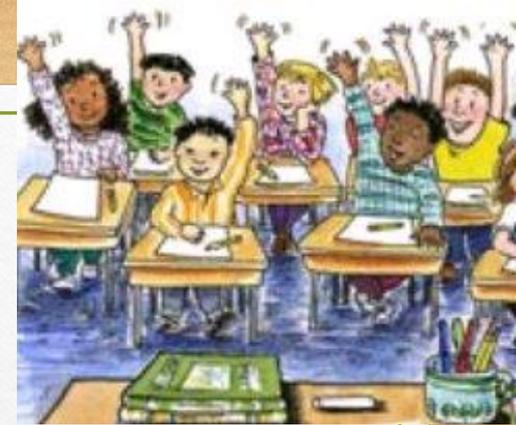
1. Dietro la porta scelta in partenza c'era l'automobile.
Il giocatore cambia e **perde**.
1. Dietro la porta scelta in partenza c'era la capra numero 1.
Il giocatore cambia e **vince**.
1. Dietro la porta scelta in partenza c'era la capra numero 2.
Il giocatore cambia e **vince**.

Volontari ... all'interrogazione

- L'insegnante di matematica domani vuole interrogare 3 alunni tra i 7 rimasti senza voto. Quante possibili combinazioni di 3 interrogati ci sono?



3 su 7



Alunni

Ada, **B**ea, **C**arlo, **D**avide, **E**nza, **F**ranca, **G**uido

Non ha alcuna importanza se un alunno è il primo, secondo o terzo per l'interrogazione del giorno. Dunque se capitano A, B e C sono equivalenti

A	A	B	B	C	C
B	C	A	C	A	B
C	B	C	A	B	A

A A B B C C
B C A C A B
C B C A B A

Poiché le 6 configurazioni sopra si equivalgono per ottenere tutte le combinazioni dopo aver fatto $7 \times 6 \times 5$ devo dividere il numero trovato per 6;

otteniamo così **$210/6=35$** .

Altri due problemi

- 18 persone partecipano ad una gara e solamente ai primi 3 verrà data una medaglia (oro, argento, bronzo). In quanti modi possono essere assegnate le 3 medaglie?
- 18 persone partecipano a un concorso e soltanto le prime 3 saranno assunte. Quante sono le possibili terne di concorrenti assunti?

18 persone partecipano ad una gara e solamente ai primi 3 verrà data una medaglia (oro, argento, bronzo). In quanti modi possono essere assegnate le 3 medaglie?

È sufficiente calcolare le disposizioni di 18 elementi di classe 3 (3 medaglie).



$$D_{18,3} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4\,896$$

18 persone partecipano a un concorso e soltanto le prime 3 saranno assunte. Quante sono le possibili terne di concorrenti assunti?

- In questo problema non ha alcuna importanza pratica se un concorrente si è classificato primo, secondo o terzo;

i tre concorrente A, B, C avranno comunque il loro posto di lavoro, dunque

A A B B C C
B C A C A B
C B C A B A

si equivalgono

A	A	B	B	C	C
B	C	A	C	A	B
C	B	C	A	B	A

- Poiché le 6 configurazioni sopra si equivalgono (notiamo $6 = P_3$), per ottenere tutte le combinazioni devo dividere il numero trovato prima, 4 896, per 6; ottengo così 816.

$$\frac{4896}{6} = 816$$

18 persone partecipano a un concorso e soltanto le prime 3 saranno assunte. Quante sono le possibili terne di concorrenti assunti

Non ha importanza se un concorrente si è classificato primo, secondo o terzo; avrà comunque il posto di lavoro

A	A	B	B	C	C
B	C	A	C	A	B
C	B	C	A	B	A

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{18 \cdot 17 \cdot 16}{6} = \frac{4896}{6} = 816$$

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} =$$

$$= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k) \cdot (n-k-1) \cdot (n-k-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-k)!}$$

=

$$= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Combinazione di n elementi di classe k

Ognuna delle scelte di k elementi tra gli n

(senza che interessi l'ordine in cui sono posti).

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Il termine $\binom{n}{k}$ si chiama coefficiente binomiale

Contare le differenti possibilità

- Permutazioni

$$P_n = n!$$

- Disposizioni $D_{n,k} = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$

- Combinazioni

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!} = \binom{n}{k}$$

Il tennis

- Andrea vuole giocare a tennis 2 volte a settimana ma la domenica e il mercoledì è già impegnato perché suona la chitarra; tra quante possibilità può scegliere i giorni in cui giocare a tennis?
- $C_{5,2} = (5 \cdot 4) : 2 = 10$
- E se vuole che uno dei 2 giorni sia il sabato?
- $C_{4,1} = 4$



Casi particolari

Quante scelte

se

- $0! = 1$

- $1! = 1$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n! \cdot (n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

- Ordino 0 elementi

- Ordino 1 elemento

- Scelgo 1 elemento tra n

- Scelgo n elemento tra n
(non interessa l'ordine)

Fate il nostro
gioco ...

Scommettiamo Sulla Matematica



Liceo Matematico al Vittoria Colonna di Roma

Superenalotto

<https://classroom.google.com/u/1/c/NTU4ODU3MTEwNTTha/m/NTgxMjI2Mjk0NTTha/details>

Combinazione di n elementi di classe k
ognuna delle scelte di k elementi tra n (senza che
interessi l'ordine in cui sono posti).

$$C_{n,k} = \frac{D_{n,k}}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Il termine $\binom{n}{k}$ si chiama coefficiente binomiale

Superenalotto

Dunque la **probabilità di fare 6** è

$$1: \binom{90}{6} = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86 \cdot 85 \cdot 84!}{6! \cdot 84!} = 1: 622\,614\,630 = \\ 0,0000000010613 = \mathbf{0,00000016013\%}$$

Per fare un confronto visivo consideriamo la probabilità di estrarre l'asso di cuori da un mazzo di 52 carte. $p(A \heartsuit) = \frac{1}{52} \approx 0,019231 = \mathbf{1,9231\%}$.

Pensate ora che la nostra schedina vincente sia dello stesso spessore dell'asso di cuori che in mezzo ad un mazzo di carte alto

Scopritelo voi



$$p(6 \text{ al superenalotto}) = 0,00000016013\%$$

- Due amici giocano a *testa e croce* con una moneta *non truccata*.

- **Entrambi** mettono 1,00 € in un piatto,
lanciano la moneta in aria e chi vice prende i 2,00 € .
 - Ti sembra un gioco onesto?
 - Se avessi 1,00 € in tasca scommetteresti a queste condizioni?
- **Adesso** il giocatore **A mette 1,00 €** nel piatto mentre **B mette 0,01 €**, lanciano la moneta in aria e chi vice prende la posta di **1,01 €** che sta nel piatto.
 - Ti sembra un gioco onesto?
 - Se avessi 1,00 € in tasca scommetteresti al posto del giocatore A con queste regole?
 - Rispetto ad una scommessa al superenalotto è più o meno conveniente?

Le strette di mano

Ad una festa ci sono 6 invitati che non si conoscono tra loro.

Quante strette di mano si daranno nel presentarsi?

-
- Ognuno stringe la mano a **quante persone?**... **Quante** strette di mano **in tutto?**
 - **Motiva** le tue risposte in modo tale che chi non ha saputo rispondere possa capire dalla tua **risposta in chat.**
 - Rispondete alla domanda precedente nel caso in cui **le persone che non si conoscono siano n.**



Il Campionato di calcio

Venti squadre devono sfidarsi nel campionato di calcio.

Nel **girone di andata** ogni squadra deve giocare **una sola partita** contro ciascuna altra squadra.

- Se si costruisse **un grafo che rappresenti la situazione** del torneo (in modo che siano rappresentate le squadre con i vertici e le partite con gli spigoli), che caratteristiche avrebbe?
- Utilizzando il metodo che preferite provate a determinare **quante partite vengono giocate in totale nel girone di andata e nell'intero campionato.**
- Rispondete alla domanda precedente nel caso in cui le **squadre siano n .**



Ti conosco o non ti conosco?

Siamo in treno, in uno scompartimento che contiene sei persone.

Provate a **dimostrare** che, fra queste sei persone, ce ne sono sicuramente:

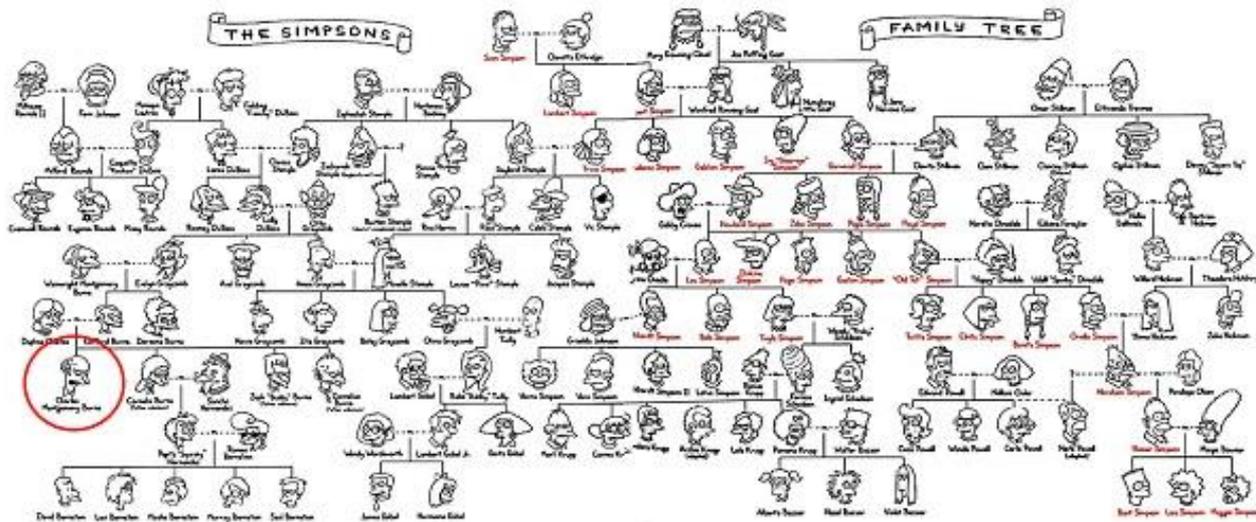
- o **tre che si conoscono** (nel senso che, comunque si scelgano due persone fra queste tre, allora le due persone si conoscono)
- oppure **tre che non si conoscono** (nel senso che, comunque si scelgano due persone fra queste tre, allora le due persone non si conoscono).



Un **grafo** (con i vertici che rappresentano le persone e gli spigoli che collegano due vertici qualora essi rappresentino due persone che si conoscono) potrebbe essere d'aiuto...

Grafi e alberi

Albero genealogico



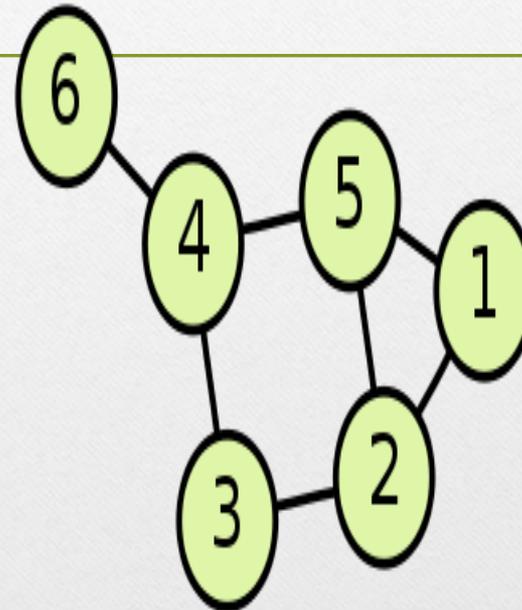


In matematica, in informatica e, più in particolare, in geometria combinatoria,

i grafi sono oggetti discreti che permettono di schematizzare una grande varietà di situazioni e di processi e spesso di consentirne l'analisi in termini quantitativi e algoritmici.

Un grafo è una struttura $G(V,E)$
costituita da:

- **oggetti semplici**, detti **Vertici** (*vertices*) o **nodi** (*nodes*): 1, 2, 3, 4, 5, 6
- **collegamenti** tra i vertici detti **lati** o **spigoli** (**Edges**)
(1-2), (1-5), (5-2), (5-4),
(4-3), (4,6), (2-3)



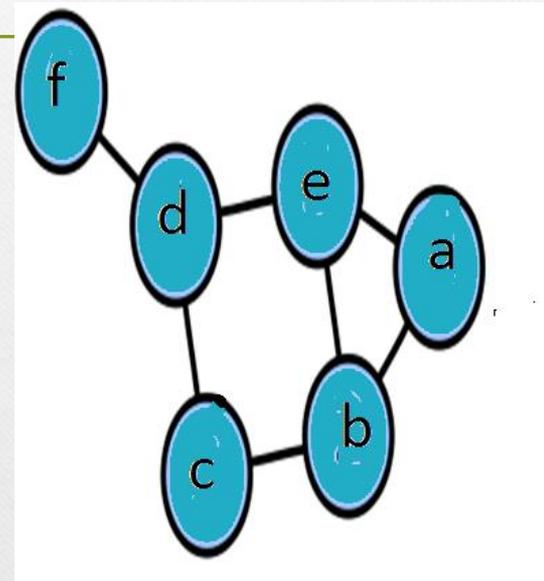
Esempio di grafo:

- Con **6 Vertici** a, b, c, d, e, f di grado rispettivamente:

2, 3, 2, 3, 3,

- Con **7 spigoli**

(a-b), (a-e), (e-b),
(e,-d), (d-c), (d,f), (b-c)

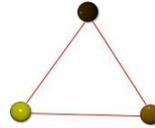


Esempi di grafi totalmente connessi (o completi)

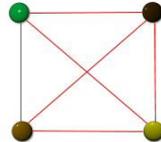
K_2



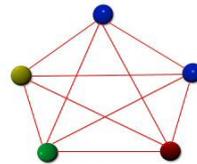
K_3



K_4

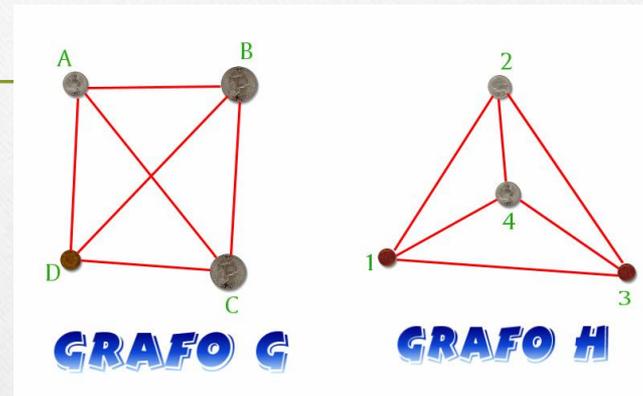


K_5



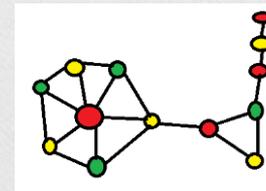
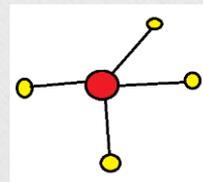
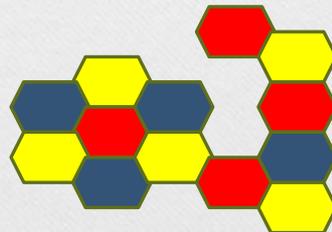
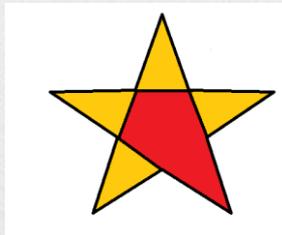
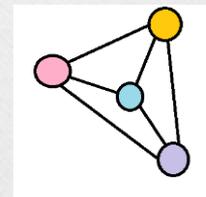
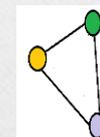
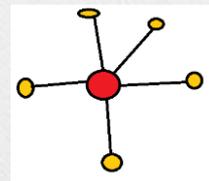
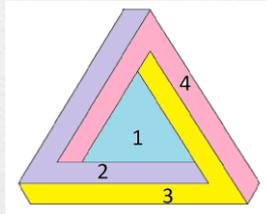
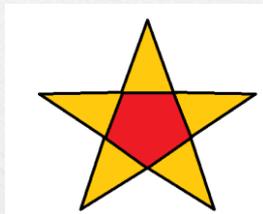
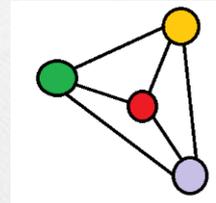
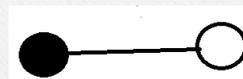
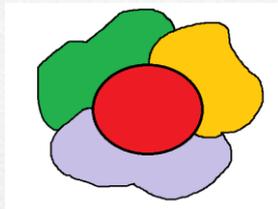
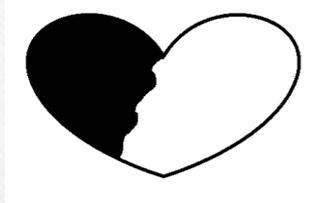
Isomorfismi tra grafi

In un grafo il posizionamento dei nodi e la forma degli spigoli sono irrilevanti, dal momento che a contare sono solo i nodi e le relazioni tra essi. In altri termini, lo stesso grafo può essere disegnato in molti modi diversi senza modificarne le proprietà.



- A → 2
- B → 4
- C → 3
- D → 1

Schematizzazione di regioni piane con grafi



Grafi



Nella seconda metà del XX secolo gli studi e i risultati si sono sviluppati ampiamente, in sintonia con i forti sviluppi della combinatoria e del calcolo automatico.

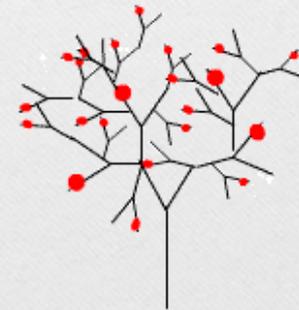
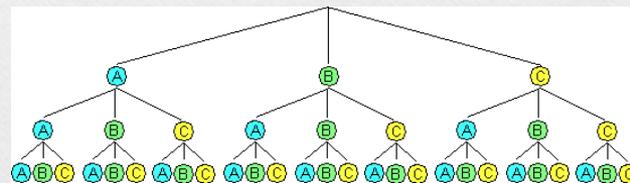
L'introduzione del computer ha consentito da un lato lo sviluppo di indagini sperimentali sui grafi (come, in particolare, nella dimostrazione del teorema dei quattro colori) e dall'altro ha richiesto alla teoria dei grafi di indagare su algoritmi e modelli di forte impatto applicativo.

Nel giro di cinquant'anni la teoria dei grafi è diventata un capitolo della matematica molto sviluppato, ricco di risultati profondi e con forti influenze applicative.

Albero



- **Un albero** è un grafo privo di cicli
- **Una foresta** è un grafo le cui componenti (connesse e non) sono alberi



È un albero?

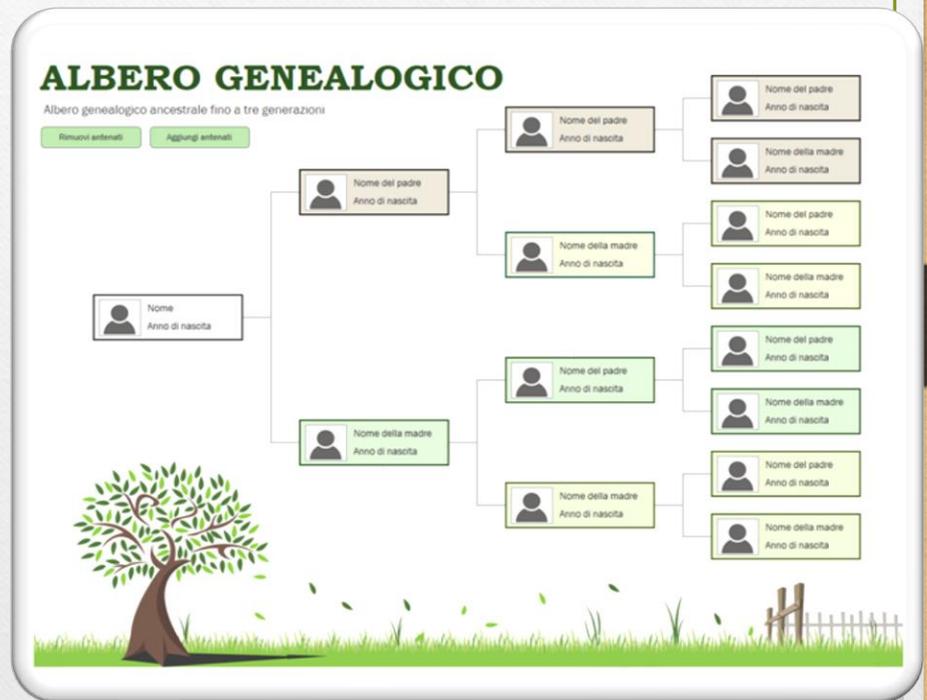
Cosa è un albero genealogico?

Come leggerlo?

Cosa sono i nodi? E i rami?

Come produrlo?

Cosa sono i nodi? E i rami?





Provate voi



Liceo Matematico al Vittoria Colonna di Roma



È un albero secondo la teoria dei grafi?



Possiamo inserire fratelli, sorelle, cugini, zii ecc.?



Che programmi di scrittura o app possiamo usare.



Per la prossima volta costruite il vostro albero genealogico con almeno 3 generazioni

Scusi, vorrei un'informazione: Che grado di parentela c'è tra voi due?

Proviamo a **definire** il grado di parentela tra due congiunti come

$$-\log_2 p = \log_2 \frac{1}{p} \quad \text{con } p \text{ probabilità di}$$

avere un gene autosomico uguale.

Ma i geni si trasmettono sempre **senza errori?**

No, allora sarebbe meglio definire il grado di parentela ricorrendo **all'entropia di Shannon.**

Genetica vs codice civile

La definizione genetica di grado di parentela (con l'entropia di Shannon) coincide con quella data nel codice civile?

CODICE CIVILE, titolo v

- LIBRO I - DELLE PERSONE E DELLA FAMIGLIA
- Art. 74 - Parentela ⁽¹⁾.
- La parentela è il vincolo tra le persone che discendono **da uno stesso stipite**, sia nel caso in cui la filiazione è avvenuta all'interno del matrimonio, sia nel caso in cui è avvenuta al di fuori di esso, sia nel caso in cui il figlio è adottivo. Il vincolo di parentela non sorge nei casi di adozione di persone maggiori di età, di cui agli articoli 291 e seguenti [...]