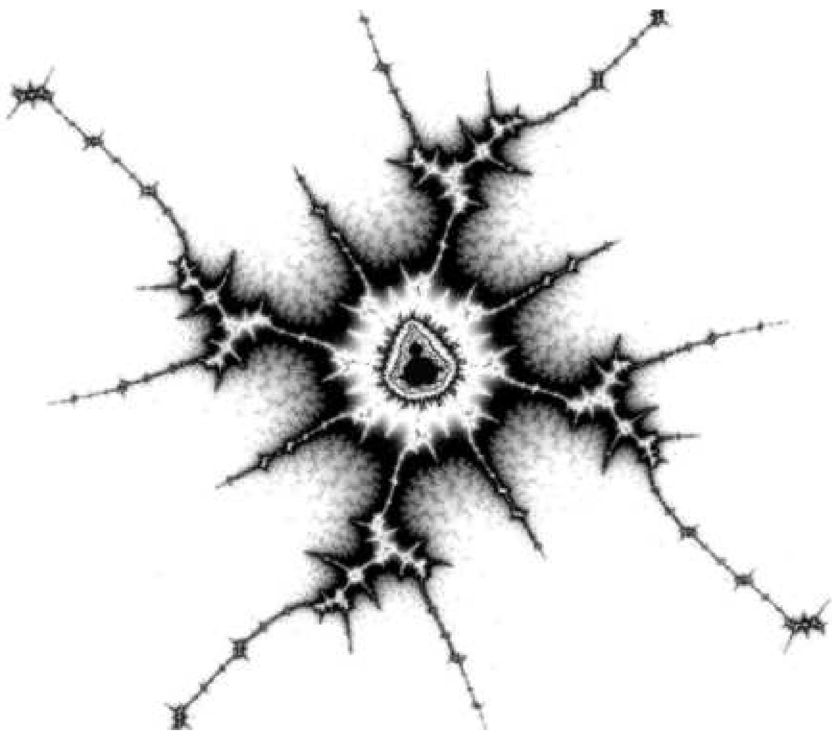
Vettori
Teoria ed Esercizi



Lorenzo Roi

Edizioni H–ALPHA

La figura di facciata costituisce un particolare dell'insieme di Mandelbrot ingrandito 4.4×10^8 volte. Coordinate sul piano complesso del centro: $0.399416 -0.564181i$.
Titolo: `Ramificazioni frattali.`

INDICE

Capitolo 1

Capitolo 2

Appendici

CAPITOLO 1

1.1 Nozione di vettore

Il concetto di vettore trova la sua origine nell'ambito della Fisica in quanto in essa la descrizione basata solo su grandezze elementari quali per esempio il tempo, la massa, la temperatura, il volume, si dimostra ben presto inadeguata alla rappresentazione degli oggetti e delle loro relazioni.

Le grandezze fisiche si distinguono perciò essenzialmente in due grandi classi. Quelle che risultano completamente definite quando se ne conosce la sola misura rientrano nella categoria delle *grandezze scalari* le altre richiedono di norma un maggior contenuto informativo e vengono rappresentate dalle *grandezze vettoriali*.[1]

Nella prima categoria rientrano grandezze come la lunghezza, l'area, il volume, il tempo, la temperatura, il calore specifico, l'energia ... e per queste è sufficiente fornire la loro grandezza relativamente ad una opportuna unità di misura: esempi tipici delle grandezze vettoriali sono invece lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza, l'impulso ... Prima quindi di introdurre queste nuove grandezze e formalizzarne le proprietà in un importante capitolo della Matematica come il Calcolo Vettoriale, conviene discuterne l'utilità attraverso un esempio che ne favorisca la comprensione intuitiva.

Supponiamo di voler definire con precisione la posizione finale raggiunta da una sferetta disposta inizialmente nel punto A del piano π (fig.1.1).

[1] In realtà si possono definire categorie più generali quali le grandezze tensoriali ma queste esulano dagli obiettivi di questa trattazione.

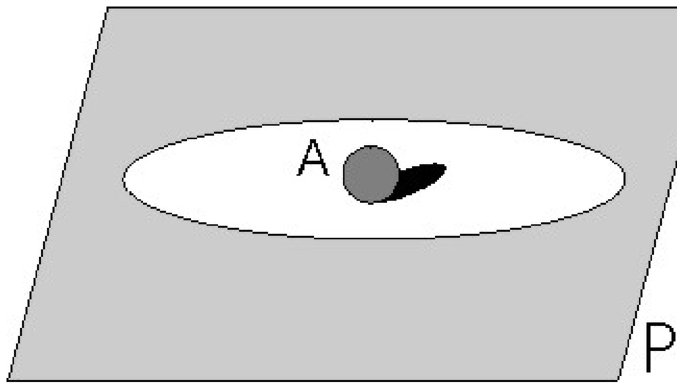


Fig. 1.1

È evidente che se diciamo che il suo spostamento è pari ad 1 metro, l'affermazione non ci permette di individuare univocamente la posizione in quanto questa può trovarsi in un punto qualsiasi della circonferenza di centro A e raggio 1 m.

Dobbiamo pertanto aggiungere delle altre informazioni, in particolare quelle legate alla nozione geometrica di direzione. Tracciata quindi una retta r per A, così da rappresentare la *direzione* di moto, potremo ora individuare due punti, definiti dalle intersezioni della circonferenza con tale retta (fig.1.2).

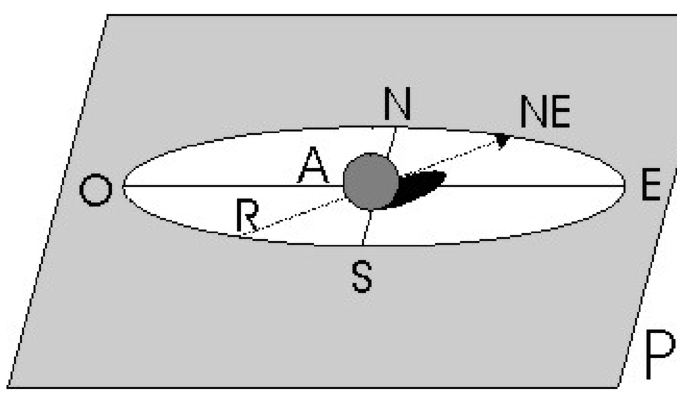


Fig. 1.2

La posizione definitiva non è ancora descritta adeguatamente e solo se aggiungiamo in quale *verso* si percorre tale retta la posizione finale B viene univocamente determinata. Così se associamo al piano un sistema di assi cartesiani ortogonali (sulle carte geografiche questi assi si identificano con le direzioni Nord–Sud ed Est–Ovest), B sarà individuato dalle seguenti 3 affermazioni:

1. distanza da A: $d = 1$ m,
2. direzione individuata dalla retta r,
3. verso: Nord–Est.

I 3 enunciati sopra costituiscono gli elementi di base per la definizione di una nuova entità, il *vettore spostamento* della sferetta A, grandezza che sinteticamente vuole riassumere il contenuto informativo delle 3 affermazioni.

Nei prossimi paragrafi si cercherà di proporre una formalizzazione matematica di tali idee così da disporre di strumenti e metodi convenientemente precisi e sintetici e in grado di descrivere un'ampia gamma di situazioni matematiche e fisiche.

1.2 Segmenti orientati e vettori

La definizione di segmento è nota dalla geometria elementare. Un tale insieme di punti verrà indicato tramite il simbolo $[AB]$, dove A e B costituiscono gli estremi del segmento. Se $A \not\equiv B$ allora il segmento $[AB]$ individua un'unica retta simbolizzata da AB.[2] Sappiamo che, scelta un'unità di misura, ad ogni segmento $[AB]$ si può associare un numero reale non negativo $\overline{AB}$, la *misura della lunghezza* di $[AB]$.

Il passo successivo consiste nel definire un *segmento orientato* come quel segmento di estremi A e B nel quale si sia assegnato un ordine e quindi si possa distinguere un punto iniziale ed uno finale. A tal fine si sceglie il simbolo $\overrightarrow{AB}$ convenendo di considerare A come il punto iniziale e B come quello finale. Graficamente ciò si esprime tramite una freccia che parte da A e giunge in B (fig.1.3).

Il simbolo $\overrightarrow{BA}$ individua il segmento orientato opposto ad $\overrightarrow{AB}$ e si pone $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. La (misura della) lunghezza[3] di entrambi è ancora la medesima, $\overline{AB} = \overline{BA}$, e risulta un numero positivo se $A \not\equiv B$ mentre è nulla se $A \equiv B$. In tal caso il segmento orientato $\overrightarrow{AA}$ è detto il segmento orientato nullo.

[2] In futuro per non appesantire troppo la notazione e solo quando il contesto non darà adito ad equivoci useremo per il segmento $[AB]$ pure la notazione AB.

[3] In Fisica la lunghezza di tale segmento orientato si dice intensità o modulo.

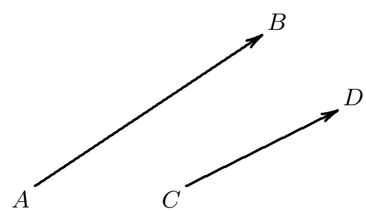


Fig. 1.3 Segmenti orientati.

A questi nuovi enti si possono in modo del tutto naturale estendere i concetti di parallelismo e perpendicolarità. In particolare $\overrightarrow{AB}$ risulta parallelo ad una retta r se lo sono le rette r e la retta AB cioè $r \parallel AB$. Così i segmenti orientati $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si dicono *collineari* (o paralleli, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$) se esiste una linea retta r alla quale entrambi risultano paralleli.

Due segmenti orientati possiedono lo *stesso verso* ($\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$) se sono collineari e le semirette $[AB$ e $[CD$ appartengono al medesimo semipiano tra i due individuati dalla retta AC. Se sono collineari ma le semirette indicate appartengono ciascuna ad un diverso semipiano allora i due segmenti orientati possiedono versi *opposti* ($\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{CD}$) (fig.1.4).

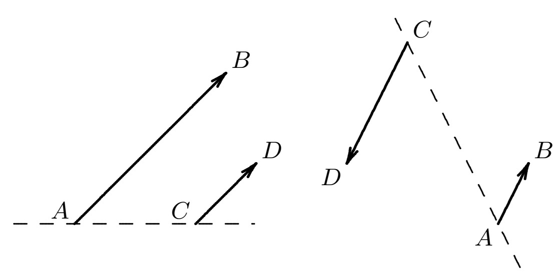


Fig. 1.4 Segmenti orientati concordi ed opposti.

Un segmento orientato $\overrightarrow{AB}$ può quindi essere posto in corrispondenza con un altro segmento orientato $\overrightarrow{CD}$ per mezzo della sua

1. lunghezza,
2. collinearità,
3. verso.

Pertanto sull'insieme dei segmenti orientati del piano è possibile definire una relazione che associ $\overrightarrow{AB}$ con $\overrightarrow{CD}$ se e solo se

a) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$,

b) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$,

c) $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Successivamente[4] mostreremo che una tale relazione (detta di *equipollenza*) risulta essere una relazione di equivalenza, per cui l'insieme dei segmenti orientati si può suddividere in classi di equivalenza. Ad una singola classe di equivalenza apparterranno quindi tutti quei segmenti orientati caratterizzati dalla medesima direzione, dall'avere verso concorde ed uguale lunghezza.

Si giunge pertanto alla seguente definizione di vettore:

Definizione 1.1. *Un vettore nel piano (o nello spazio) è definito come l'insieme di tutti i segmenti orientati equipollenti, ossia di tutti i segmenti orientati aventi la medesima direzione, verso e lunghezza.*

Il simbolo che denoterà un vettore sarà usualmente una lettera minuscola in grassetto come $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \ldots \mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, mentre la notazione $\overrightarrow{AB}$ individuerà i segmenti orientati rappresentativi del vettore. Per esempio, se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ possiedono la medesima direzione, verso e lunghezza ma $A \not\equiv C$ allora entrambi appartengono alla medesima classe e sono rappresentativi dello stesso vettore $\mathbf{a}$: poniamo quindi $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (fig.1.5).

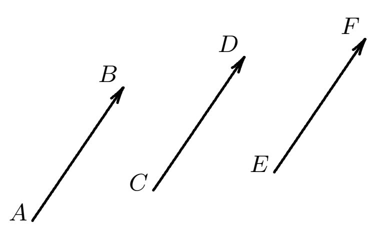


Fig. 1.5 Segmenti orientati equipollenti.

Ovviamente la direzione, verso e modulo di un vettore sono quelle di un qualsiasi segmento rappresentativo $\overrightarrow{AB}$ per cui si scrive pure

$$|\mathbf{a}| = |\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}.$$

In particolare il vettore nullo $\mathbf{0}$ è definito come quel vettore rappresentato da segmenti orientati nulli, per cui il suo modulo è $|\mathbf{0}| = |\overrightarrow{AA}| = 0$.

[4] Si veda la dispensa su *Insiemi, funzioni e trasformazioni.*

Naturalmente si estendono ai vettori le nozioni di collinearità e verso. Rispettivamente due vettori si dicono *collineari* ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$), di *verso concorde* ($\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$) o di *verso opposto* ($\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{b}$) se lo sono i loro segmenti orientati rappresentativi. Per $\mathbf{0}$ la direzione non è definita nel senso che $\mathbf{0}$ è collineare a qualsiasi vettore: analogamente per il suo verso. Sulla base di ciò si può concludere che

Proprietà dell'uguaglianza. *Due vettori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *sono uguali (cioè i due insiemi coincidono) se e solo se:*

$$\text{a) } \mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b} \qquad \text{b) } |\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|.$$

1.3 Somma e differenza di vettori

Dati due vettori è naturale definire delle operazioni tra essi in modo da associare a ciascuna coppia un altro vettore. Prendendo spunto da una situazione fisica, consideriamo una particella che inizialmente si sposti da un punto A al punto B (fig.1.6). Tale spostamento è rappresentato dal vettore $\mathbf{a}$.

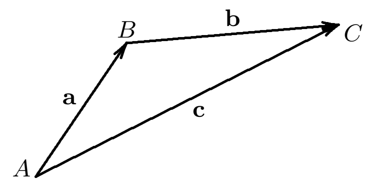


Fig. 1.6 Spostamenti di una particella e vettore somma.

Successivamente la particella si muove da B a C e questo ulteriore spostamento viene rappresentato da $\mathbf{b}$. Lo spostamento complessivo è dato dal nuovo vettore $\mathbf{c}$. Quest'ultimo è quello che si definisce vettore somma di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Difatti

Definizione 1.2. *La somma di due vettori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *è un vettore* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ *la cui direzione e verso si ottengono nel modo seguente:*

- *si fissa il vettore* $\mathbf{a}$ *e, a partire dal suo punto estremo, si traccia il vettore* $\mathbf{b}$. *Il vettore che unisce l'origine di* $\mathbf{a}$ *con l'estremo di* $\mathbf{b}$ *fornisce la somma* $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

Per esempio se $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, allora

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

ossia, osservando la sequenza delle lettere nell'ultima uguaglianza, il vettore somma si ottiene "omettendo" le lettera comune intermedia. Questa definizione, detta *regola del triangolo* si può generalizzare in modo del tutto intuitivo ad una somma di più vettori.

Dalla definizione si deducono facilmente le seguenti proprietà:

PROP. COMMUTATIVA: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

PROP. ASSOCIATIVA: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

ELEMENTO NEUTRO: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$

In particolare dalla proprietà commutativa discende una definizione alternativa della somma (o risultante) di due vettori ossia la *regola del parallelogramma.* Questa consiste nell'individuare il vettore somma di *due vettori non collineari* come il vettore rappresentato dalla diagonale del parallelogramma costruito per mezzo dei segmenti orientati rappresentativi dei due vettori e disposti in modo da avere l'origine in comune (fig.1.7).

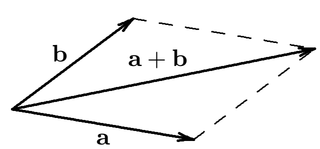


Fig. 1.7 Regola del parallelogramma e vettore somma.

Diamo qui alcuni esemplificazioni grafiche dei metodi appena presentati.

Siano $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ tre vettori qualsiasi. Per determinare la loro risultante $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$ possiamo procedere in diversi modi. Tramite la regola del triangolo, riscritta la loro somma in forma alternativa per mezzo della proprietà associativa $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = (\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$, si procede costruendo dapprima il vettore $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ e quindi il vettore risultante lo si somma a $\mathbf{c}$ (fig.1.8a,b).

Un'alternativa meno laboriosa e più efficace nel caso che i vettori siano numerosi, consiste nel traslare i diversi vettori in modo che l'origine di ognuno coincida con l'estremo del precedente (*regola del poligono*). Il vettore risultante si ottiene quindi unendo l'origine del primo con l'estremo dell'ultimo (fig.1.8c).

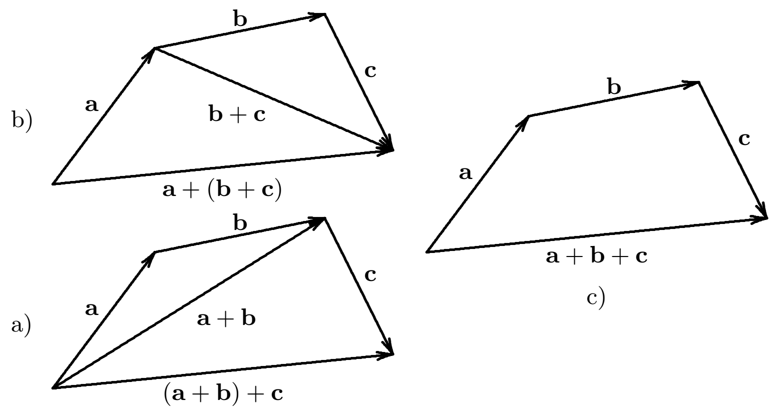


Fig. 1.8 Somma di più vettori e proprietà associativa.

Sia infine $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ un vettore rappresentato dal segmento orientato $\overrightarrow{AB}$. Se, come già detto $\overrightarrow{BA}$ è il segmento orientato opposto ad $\overrightarrow{AB}$, è naturale associare ad esso il vettore opposto di $\mathbf{a}$, designato da $-\mathbf{a}$. Allora si pone

Definizione 1.3. *Il vettore opposto ad* $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ *è* $-\mathbf{a} = \overrightarrow{BA}$.

In tal modo discende che $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ in quanto risulta $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \mathbf{0}$. È evidente che, per definizione, i moduli di $\mathbf{a}$ e $-\mathbf{a}$ sono posti uguali, la direzione si intende la medesima e i versi vanno considerati opposti: in simboli

$$|\mathbf{a}| = |-\mathbf{a}|, \qquad \mathbf{a} \uparrow\downarrow (-\mathbf{a}).$$

È quindi possibile definire la *differenza* tra due vettori. Infatti si dà la seguente definizione:

Definizione 1.4. *La differenza* $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ *di due vettori è la somma del vettore* $\mathbf{a}$ *con l'opposto del vettore* $\mathbf{b}$ *ossia*

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \mathbf{a}+(-\mathbf{b}).$$

Va notato che se, sulla base di $\mathbf{a}$ e di $\mathbf{b}$ disposti con la medesima origine O, si costruisce un parallelogramma (fig.1.9), allora la lunghezza della diagonale uscente da O esprime la lunghezza di $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ mentre la lunghezza dell'altra diagonale è pari alla lunghezza del vettore $\mathbf{a}-\mathbf{b}$:

$$|\overrightarrow{OC}| = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|, \qquad |\overrightarrow{BA}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|. \tag{1.1}$$

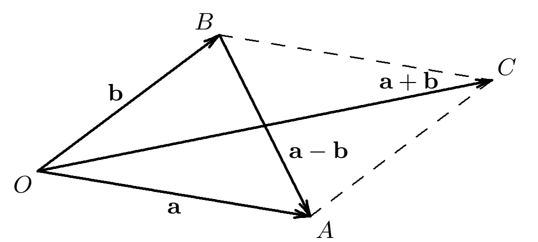


Fig. 1.9 Diagonali del parallelogramma.

1.4 Esempi ed esercizi

Proponiamo ora alcuni esempi ed esercizi che coinvolgano le nozioni di somma e differenza tra vettori.

Esempio 1.1. *Siano $ABCDEF$ i vertici di un esagono regolare di centro O. Determinare la somma dei vettori $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}$.*
Poiché nelle diagonali di un esagono regolare il punto O di intersezione è anche il punto medio della diagonale allora per la coppia di vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OD}$ sussiste la condizione $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OD}$. Ne segue che $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=\mathbf{0}$. Poiché ciò si può estendere alle rimanenti coppie, utilizzando le proprietà commutativa ed associativa, discende:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=$$
$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD})+(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OE})+(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OF})=\mathbf{0}+\mathbf{0}+\mathbf{0}=\mathbf{0}.$$

Esempio 1.2. *Sia $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}$. Dimostriamo che è pure $\mathbf{a}=\mathbf{c}-\mathbf{b}$ e che quindi, nelle uguaglianze tra vettori, si può trasportare un vettore da un membro all'altro solo se se ne prende l'opposto.*
Difatti, utilizzando la definizione di somma vettoriale, sommiamo $-\mathbf{b}$ ad entrambi i membri di $\mathbf{c}=\mathbf{a}+\mathbf{b} \iff \mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{c}+(-\mathbf{b})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(-\mathbf{b})$ e quindi sfruttando la proprietà associativa

$$\mathbf{c}-\mathbf{b}=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+(-\mathbf{b})=\mathbf{a}+(\mathbf{b}+(-\mathbf{b}))=\mathbf{a}+\mathbf{0}=\mathbf{a}$$

ossia $\mathbf{c}-\mathbf{b}=\mathbf{a}$.

Esempio 1.3. *Siano A, B, C, D quattro punti qualsiasi del piano e P, Q, R i punti medi rispettivamente dei segmenti $[AB]$, $[CD]$, $[PQ]$. Dimostrare che $\overrightarrow{RA}+\overrightarrow{RB}+\overrightarrow{RC}+\overrightarrow{RD}=\mathbf{0}$.*

I segmenti orientati $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$ *rappresentano il medesimo vettore* $\mathbf{a}$ *in quanto appartenenti alla medesima retta* AB *e di verso concorde. Analogamente per* $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{QD} = \mathbf{b}$ *e* $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{RQ} = \mathbf{c}$*. Ne segue che, essendo (fig.1.10)*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{RA} &= \overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PA} = (-\mathbf{c}) + (-\mathbf{a}) \\
\overrightarrow{RB} &= \mathbf{a} - \mathbf{c}, \\
\overrightarrow{RC} &= \mathbf{c} - \mathbf{b}, \\
\overrightarrow{RD} &= \mathbf{b} + \mathbf{c},
\end{aligned}$$

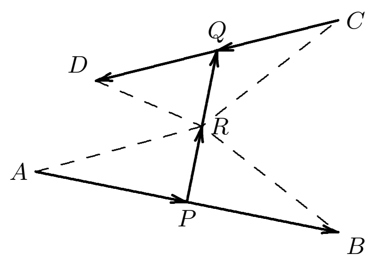


Fig. 1.10

sommando i primi ed i secondi membri si ottiene

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} + \overrightarrow{RC} + \overrightarrow{RD} &= (-\mathbf{c}) + (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} - \mathbf{c} + \mathbf{c} - \mathbf{b} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \\
&= (\mathbf{a} - \mathbf{a}) + (\mathbf{c} - \mathbf{c}) + (\mathbf{b} - \mathbf{b}) + (\mathbf{c} - \mathbf{c}) \\
&= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Esercizio 1.1. *Dimostrare, sfruttando la diseguaglianza triangolare che* $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$*. Da questa dedurre che vale pure* $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \geq |\mathbf{a}| - |\mathbf{b}|$.

Esercizio 1.2. *In una piramide retta regolare a base quadrata* $ABCDV$*,* O *è il centro della base* $ABCD$*. Esprimere il vettore* $\overrightarrow{VO}$ *in termini di* $\overrightarrow{VA}$*,* $\overrightarrow{VB}$*,* $\overrightarrow{VC}$*,* $\overrightarrow{VD}$*.*

1.5 Moltiplicazione scalare–vettore

Dato uno scalare α (numero reale) e un vettore $\mathbf{a}$ è pure possibile definire una nuova operazione tale da associare a questi due un altro vettore. Allora si dà la seguente definizione:

DEFINIZIONE 1.5. *La moltiplicazione* $\alpha\mathbf{a}$ *(o* $\mathbf{a}\alpha$*) di un vettore* $\mathbf{a}$ *con il numero reale* α *è un vettore* $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$*, collineare ad* $\mathbf{a}$*, di modulo* $|\alpha| \cdot |\mathbf{a}|$*, e verso coincidente con quello di* $\mathbf{a}$ *se* $\alpha > 0$*, opposto a quello di* $\mathbf{a}$ *se* $\alpha < 0$*. Nel caso che sia* $\alpha = 0$ *o* $\mathbf{a} = 0$ *il vettore* $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Possiamo quindi scrivere che

$$\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a} \quad \stackrel{\text{def}}{=} \quad \begin{cases} \alpha\mathbf{a} \upuparrows \mathbf{a} \Longleftrightarrow \alpha > 0 \\ \alpha\mathbf{a} \uparrow\downarrow \mathbf{a} \Longleftrightarrow \alpha < 0 \\ |\alpha\mathbf{a}| = |\alpha| \cdot |\mathbf{a}| \end{cases} \tag{1.2}$$

In particolare $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$, $0 \cdot \mathbf{a} = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e infine $(-1)\mathbf{a} = -\mathbf{a}$.

Seguono invece direttamente dalla definizione[5] le proprietà: se α, $\beta \in \mathbf{R}$

1. $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$ che costituisce la proprietà associativa rispetto ai fattori numerici,
2. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$, distributiva rispetto alla somma degli scalari,
3. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$, distributiva rispetto alla somma dei vettori.

Dalla (1.2) discende un importante criterio per determinare la collinearità di due vettori. Difatti vale il seguente

TEOREMA 1.1. *Un vettore* $\mathbf{b}$ *è collineare con il vettore non nullo* $\mathbf{a}$ *se e solo se esiste un numero* k *tale che sia*

$$\mathbf{b} = k\mathbf{a}. \tag{1.3}$$

Se si moltiplica la $\mathbf{b} = k\mathbf{a}$ per uno scalare qualsiasi $\beta \neq 0$ si ottiene $\beta\mathbf{b} = \beta k\mathbf{a}$ cioè $\beta\mathbf{b} - \beta k\mathbf{a} = \mathbf{0}$, per cui posto $-\beta k = \alpha$ otteniamo

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{1.4}$$

che è un'altra forma della condizione di collinearità. In definitiva, due vettori non nulli sono collineari se è possibile scriverli nella forma (1.3) o nella forma (1.4) con $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

ESEMPIO 1.4. *Dimostriamo che, se* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *non sono collineari e sussiste l'uguaglianza* $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$*, allora dev'essere* $\alpha = \beta = 0$*. Difatti, ragionando*

[5] Per esercizio, si cerchi di dimostrarle.

per assurdo, sia $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = \mathbf{0}$ *ma* $\alpha \neq 0$. *Allora*

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)\mathbf{0}\\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)\cdot(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})\\ &= \left(\frac{1}{\alpha}\right)(\alpha\mathbf{a}) + \left(\frac{1}{\alpha}\right)(\beta\mathbf{b})\\ &= 1\cdot\mathbf{a} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\mathbf{b}\\ &= \mathbf{a} - \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)\mathbf{b},\end{aligned}$$

per cui spostando un vettore nell'altro membro si giunge alla $\mathbf{a} = (-\beta/\alpha)\mathbf{b}$. *Quest'ultima però equivale ad affermare la collinearità di* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *e ciò va contro l'ipotesi della non collinearità. Poiché si può ripetere la dimostrazione anche per* $\beta \neq 0$, *l'assunto è dimostrato. Pertanto se vale la (1.4) allora o* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *sono collineari o sono entrambi nulli i termini scalari.*

Un'espressione del tipo $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ viene indicata come una *combinazione lineare* dei due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$. Se quindi essi sono collineari ne segue che una loro combinazione lineare è nulla e ciò si esprime anche affermando che essi sono *linearmente dipendenti.* Più in generale, costruita una combinazione lineare di n vettori

$$\alpha_1\mathbf{a}_1,\ \alpha_2\mathbf{a}_2, \dots, \alpha_n\mathbf{a}_n$$

questi saranno *linearmente dipendenti* se

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

dove almeno uno dei coefficienti scalari α_i dev'essere diverso dallo zero, *linearmente indipendenti* se

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \cdots + \alpha_n\mathbf{a}_n \neq \mathbf{0}.$$

Esercizio 1.3. *Supposti assegnati i vettori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$, *rappresentare su un foglio di carta millimetrata i vettori*

$$-\frac{1}{5}\mathbf{a} \qquad -\mathbf{a} + 2\mathbf{b} \qquad \frac{5}{2}\mathbf{a} - 3\mathbf{b} \qquad -\frac{3}{2}\mathbf{a} - 2\mathbf{b}.$$

Esercizio 1.4. *Determinare il numero* x *in modo che il vettore* $\mathbf{b} = x\mathbf{a}$ *abbia modulo unitario e sia*

a) concorde ad $\mathbf{a}$ ($\mathbf{b} \uparrow\uparrow \mathbf{a}$),
b) discorde ($\mathbf{b} \uparrow\downarrow \mathbf{a}$).

ESEMPIO 1.5. *I vettori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *non sono collineari. Determinare per quali valori di* x *i vettori* $\mathbf{c} = 2x\mathbf{a} + (3x+4)\mathbf{b}$ *e* $\mathbf{d} = 2\mathbf{a} + x\mathbf{b}$ *sono collineari.*
Perché $\mathbf{c}$ *sia collineare con* $\mathbf{d}$ *deve, secondo la (1.3) potersi scrivere* $\mathbf{c} = y\mathbf{d}$*.* *Da questa discende*

$$2x\mathbf{a} + (3x+4)\mathbf{b} = y(2\mathbf{a} + x\mathbf{b}) = 2y\mathbf{a} + xy\mathbf{b}.$$

Riportando tutto a primo membro

$$2x\mathbf{a} - 2y\mathbf{a} + (3x+4)\mathbf{b} - xy\mathbf{b} = \mathbf{0}$$

da cui, per la proprietà distributiva si ottiene

$$(2x - 2y)\mathbf{a} + (3x + 4 - xy)\mathbf{b} = \mathbf{0} :$$

d'altra parte $\mathbf{a}$ *non è collineare con* $\mathbf{b}$ *per cui i coefficienti scalari tra parentesi devono essere contemporaneamente nulli e quindi si può impostare il sistema*

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 3x + 4 - xy = 0. \end{cases}$$

La sua risoluzione porta alla coppia $x = 4$ e $x = -1$.

ESERCIZIO 1.5. *Sono assegnati i tre vettori non nulli* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, *ciascuno dei quali non è collineare con gli altri due. Sapendo che il vettore* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ *è collineare con* $\mathbf{c}$ *e* $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ *è collineare con* $\mathbf{a}$, *determinare la somma* $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

ESEMPIO 1.6. *Vogliamo dimostrare che il segmento congiungente i punti medi dei due lati di un triangolo* $\triangle ABC$ *è parallelo al terzo lato ed è di lunghezza pari alla metà di questo. (fig.1.11)*

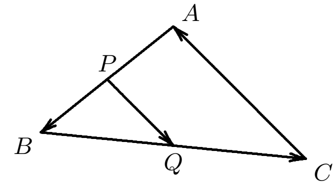


Fig. 1.11

Consideriamo i lati di $\triangle ABC$ come i segmenti orientati rappresentativi dei vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$. La somma di questi è evidentemente nulla per cui

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CA}.$$

D'altra parte posti P e Q i punti medi di $[AB]$ e $[BC]$ risulta

$$\overrightarrow{PB} = \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} \qquad \qquad \overrightarrow{BQ} = \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC}.$$

Poiché $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ}$, sostituendo la precedente si ottiene

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{BC} = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) :$$

Sfruttando la prima relazione scritta la somma vettoriale tra parentesi eguaglia $\overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{CA}$ e quindi

$$\overrightarrow{PQ} = -\left(\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{CA}.$$

I due vettori $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{CA}$ hanno pertanto la medesima direzione e il rapporto tra i loro moduli

$$\frac{|\overrightarrow{PQ}|}{|\overrightarrow{CA}|} = \frac{1}{2}$$

esprime la tesi dell'esercizio.

Esempio 1.7. *Sia dato il triangolo $\triangle ABC$. Si determini il punto P tale che valga la $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} - 3\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{AB}$.*
Poiché

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} &= -\overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} \\ \overrightarrow{PC} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}, \end{aligned}$$

discende

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-\overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP}) - 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP}) \\ &= -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AP} \end{aligned}$$

e quindi eliminando $\overrightarrow{AB}$ abbiamo $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AC}$. Ciò significa che il punto cercato P giace sulla semiretta $[AC$, dalla parte di C, ad una distanza da A pari a $\overline{AP} = 3\overline{AC}$.

Esercizio 1.6. *Detto P un punto qualsiasi del piano π cui appartiene pure il triangolo $\triangle ABC$, siano Q, R, S i punti medi del lati AB, BC, CA. Dimostrare che risulta $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS}$.*

Esercizio 1.7. *Dimostrare che in un trapezio la congiungente i punti medi dei lati non paralleli è parallela alle basi ed ha lunghezza pari alla loro semisomma.*

Esercizio 1.8. *Presi due vettori $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ non paralleli e con lo stesso punto di applicazione O, sia $\overrightarrow{OA} = 2 \cdot \mathbf{a}$ e $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Tracciare il vettore $\overrightarrow{BC} = \mathbf{a}$ e congiungere O con C. Il punto P divida il segmento OC in due parti tali che $\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \overrightarrow{PC}$. Dimostrare che i punti A, P e B sono allineati (è allo scopo sufficiente dimostrare che i due vettori $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{PB}$ sono multipli di uno stesso vettore).*[6]

Esercizio 1.9. *Sia O il punto d'incontro delle mediane di un triangolo $\triangle ABC$ (baricentro). Dimostrare che $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{0}$.*

Esercizio 1.10. *Sia CM una mediana del triangolo $\triangle ABC$. Si dimostri che $\overline{CM} < \frac{1}{2}(\overline{CA} + \overline{CB})$.*

Esercizio 1.11. *$\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CO}$ sono i vettori rappresentativi delle mediane di un triangolo ABC. Si dimostri che $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CO} = \mathbf{0}$.*

1.6 Scomposizione di un vettore

Siano $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ due vettori non collineari e tali da avere l'origine O in comune cioè $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$. Detto π il piano individuato dai tre punti O, A, B, sia $\mathbf{c}$ un vettore complanare con $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (fig.1.12): ciò significa che $\mathbf{c}$ appartiene a π oppure è ad esso parallelo.

Costruito il segmento orientato $\overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, sarà $C \in \pi$. Possiamo ora tracciare due rette, r ed s, uscenti da C aventi direzioni parallele ad $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ in modo che $r \parallel \mathbf{a}$ e $s \parallel \mathbf{b}$. Indicati i punti di intersezione delle rette $\{D\} = s \cap OA$ e $\{E\} = r \cap OB$ e, in accordo alla regola del parallelogramma per la somma di vettori, possiamo scrivere che

$$\mathbf{c} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE}. \tag{1.5}$$

[6] Prima parte dell'esercizio n. 1 assegnato all'esame di maturità dell'a.s. 1991–92.

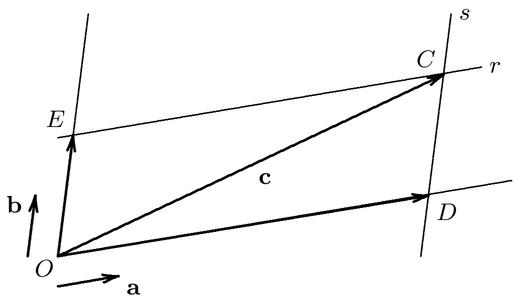


Fig. 1.12

Poiché il vettore $\overrightarrow{OD}$ è collineare con $\mathbf{a}$ (e questo non è il vettore nullo), dal criterio sulla collinearità tra vettori è possibile determinare un numero α tale che $\overrightarrow{OD} = \alpha\mathbf{a}$. Con simili considerazioni discende pure che esiste un $\beta \in \mathbf{R}$ tale che $\overrightarrow{OE} = \beta\mathbf{b}$. Sostituendo queste ultime due nella (1.5) otteniamo

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \tag{1.6}$$

Quanto espresso da (1.5) costituisce un risultato molto importante. Difatti, mentre la (1.5) rappresenta la *scomposizione* di un vettore lungo le direzioni individuate da $\mathbf{a}$ e da $\mathbf{b}$ e i vettori $\overrightarrow{OD}$ e $\overrightarrow{OE}$ si dicono i *componenti o proiezioni* di $\mathbf{c}$, la (1.6) è considerata l'*espansione del vettore* $\mathbf{c}$ rispetto alla coppia ordinata di vettori non collineari $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$: questi complessivamente costituiscono una *base* del piano π. Poiché fissata una base, si può dimostrare che per un determinato vettore $\mathbf{c}$ lo sviluppo (1.6) è unico, la coppia ordinata di numeri reali (α, β) può servire ad individuare univocamente il vettore $\mathbf{c}$ per cui si può porre simbolicamente

$$\mathbf{c} = (\alpha, \beta) \qquad \text{oppure} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

I numeri reali α e β costituiscono le *componenti*[7] (o *coordinate*) di $\mathbf{c}$ nella base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$. In definitiva possiamo stabilire il seguente teorema:

Teorema 1.2. *Qualsiasi sia la coppia di vettori non collineari* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$, *è possibile determinare, per un dato vettore* $\mathbf{c}$ *complanare con* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$, *una coppia di numeri reali* (α, β) *tale che valga la relazione*

$$\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}. \tag{1.8}$$

[7] Non si confondano i vettori *componenti* con le *componenti* di un vettore: i primi sono dei vettori, le seconde degli scalari.

In termini simbolici, definita la base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ e le espansioni $\mathbf{e} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$, $\mathbf{f} = \alpha'\mathbf{a} + \beta'\mathbf{b}$ allora

$$\mathbf{e} = \mathbf{f} \iff \alpha = \alpha', \quad \beta = \beta'.$$

ESERCIZIO 1.12. *Si consideri un parallelogramma $ABCD$. Esprimere i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AD}$ rappresentativi dei lati, in termini delle diagonali $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{BD}$.*

ESERCIZIO 1.13. *Sia dato il triangolo $\triangle ABC$ ed un punto $P \in [BC]$. Sapendo che $\overline{BP}/\overline{BC} = \alpha$, esprimere il vettore $\overrightarrow{AP}$ in termini di $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$. Si riscriva il risultato nel caso che $[AP]$ sia la mediana di $[BC]$.*

1.7 Componenti cartesiane di un vettore

È comodo esprimere lo sviluppo (1.8) in termini di vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ che abbiano modulo pari ad uno. A tal fine un qualsiasi vettore di modulo unitario viene detto *versore* per cui

DEFINIZIONE 1.6. *Dicesi versore, un vettore* $\mathbf{u}$ *tale che* $|\mathbf{u}| = 1$.

Dato un qualsiasi vettore $\mathbf{a}$ è immediato costruire un versore che abbia la medesima direzione di $\mathbf{a}$ e con verso concorde[8]: difatti, ponendo

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a},$$

questo è un vettore che è diretto e orientato come $\mathbf{a}$, e il cui modulo risulta

$$|\mathbf{u}| = \left|\frac{1}{|\mathbf{a}|}\right| \cdot |\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|} \cdot |\mathbf{a}| = 1,$$

ossia $\mathbf{u}$ è un versore. Se invece risultasse

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{a} \cdot \mathbf{a}$$

questo sarebbe ancora un versore ma con verso opposto ad $\mathbf{a}$.

Sappiamo che un sistema cartesiano ortogonale xOy isometrico si ritiene assegnato quando, definiti due assi ortogonali, su questi si stabiliscono un'origine, un verso positivo e una unità di misura. In alternativa, se scegliamo

[8] Si veda anche l'es.1.4.

due versori ortogonali $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$, questi determinano due direzioni ortogonali così come un verso positivo: il segmento unitario rappresentativo dell'unità di misura è invece pari al loro modulo. Assegnare una tale base equivale quindi al definire un sistema cartesiano che, d'ora in poi riterremo dato pure tramite una coppia di versori.

Estendendo le conclusioni del paragrafo precedente alla base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$, possiamo pertanto esprimere un qualsiasi vettore del piano come

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} \tag{1.9}$$

e identificare la coppia (a_x, a_y) come le *componenti cartesiane* di $\mathbf{a}$ e i vettori $a_x\mathbf{i}$ e $a_y\mathbf{j}$ come i *vettori componenti cartesiani* di $\mathbf{a}$.

Le conseguenze di queste posizioni sono notevoli e conviene indagarle. Difatti, sia $\mathbf{c}$ un vettore del piano definito dai due versori $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$ ($\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$). Se O è l'origine comune dei versori allora $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ (fig.1.13). Poiché sappiamo possibile una decomposizione di $\mathbf{c}$ nella forma $\mathbf{c} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ vogliamo determinare il significato della coppia di numeri reali (x, y).

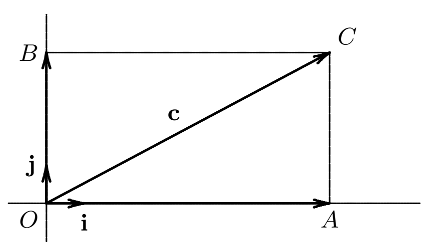


Fig. 1.13

A tal fine è immediato notare che il vettore componente $\overrightarrow{OA} = x\mathbf{i}$ possiede modulo $|\overrightarrow{OA}| = |x| \cdot |\mathbf{i}| = |x|$ ed individua il punto dell'asse x, $A(x, 0)$: analogamente il vettore $\overrightarrow{OB}$ di modulo $|\overrightarrow{OB}| = |y| \cdot |\mathbf{j}| = |y|$ individua il punto $B(0, y)$: ne segue che la coppia (x, y) è rappresentativa delle coordinate di C. Applicando il teorema di Pitagora al triangolo $\triangle OAC$ si ottiene pure l'espressione per il modulo $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Come conseguenza particolare, poiché risulta $\mathbf{i} = 1 \cdot \mathbf{i}$ e $\mathbf{j} = 1 \cdot \mathbf{j}$, è possibile identificare questi versori tramite le coppie

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Più in generale siano $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ le coordinate degli estremi del segmento orientato $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$. Vogliamo ottenere la scomposizione di $\mathbf{a}$

nella base $\mathbf{i}$ e $\mathbf{j}$. Osservato che $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, sommando ad entrambi i membri l'opposto di $\overrightarrow{OA}$, discende

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}. \tag{1.10}$$

D'altra parte, per quanto detto sopra $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ si possono rappresentare come

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} &= x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j}\\ \overrightarrow{OB} &= x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}\end{aligned}$$

per cui introdotti in (1.10)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= -(x_A\mathbf{i} + y_A\mathbf{j}) + x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}\\ &= -x_A\mathbf{i} + x_B\mathbf{i} - y_A\mathbf{j} + y_B\mathbf{j}\\ &= (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j},\end{aligned}$$

dove si sono sfruttate le proprietà commutativa, associativa e distributiva. In definitiva, quest'ultimo risultato giustifica la seguente conclusione:

Proprietà delle componenti cartesiane. *Le componenti del vettore $\overrightarrow{AB}$ nella base $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ si ottengono dalla differenza delle corrispondenti coordinate dell'estremo B con quelle del punto iniziale A, ossia*

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j}. \tag{1.11}$$

Il modulo di $\overrightarrow{AB}$ si deduce immediatamente applicando il T. di Pitagora ottenendo

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2},$$

espressione del tutto analoga a quella già conosciuta e che esprime la distanza tra due punti.

Quanto sopra si estende naturalmente allo spazio tridimensionale. Per far ciò è sufficiente definire una terna di versori $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ ortogonali aventi la medesima origine O (fig.1.14). Ciascuno di questi è individuato dalle

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{j} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \mathbf{k} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

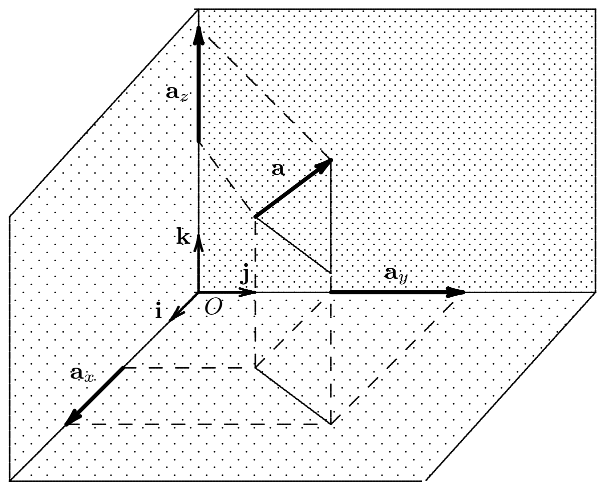


Fig. 1.14 Decomposizione tridimensionale di un vettore **a**.

In tal modo un vettore nello spazio possiede la decomposizione (si veda sempre la fig.1.14) nei vettori componenti

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \\ &= a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \end{aligned}$$

che si dimostra essere l'unica in tale base. Per inciso, tale espressione evidenzia come siano necessari tre vettori non appartenenti allo stesso piano (ossia *non complanari*) per descrivere un generico vettore spaziale.

In termini delle coordinate $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$ degli estremi del vettore si ha

$$\begin{aligned} a_x &= x_B - x_A \\ a_y &= y_B - y_A \\ a_z &= z_B - z_A \end{aligned}$$

ossia

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\mathbf{i} + (y_B - y_A)\mathbf{j} + (z_B - z_A)\mathbf{k}.$$

Il modulo assume la forma

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AB}| &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{a^2} = a. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Vanno infine pure evidenziate le nuove forme che assumono le operazioni finora introdotte. Tenendo conto delle proprietà già menzionate si arriva facilmente alle

$$
\begin{aligned}
\mathbf{a}+\mathbf{b} &= (a_x+b_x)\mathbf{i} + (a_y+b_y)\mathbf{j} + (a_z+b_z)\mathbf{k} \\
\mathbf{a}-\mathbf{b} &= (a_x-b_x)\mathbf{i} + (a_y-b_y)\mathbf{j} + (a_z-b_z)\mathbf{k} \\
\alpha\mathbf{a} &= \alpha a_x\mathbf{i} + \alpha a_y\mathbf{j} + \alpha a_z\mathbf{k},
\end{aligned}
$$

e alle analoghe

$$
\mathbf{a}+\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x+b_x \\ a_y+b_y \\ a_z+b_z \end{pmatrix} \qquad \mathbf{a}-\mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x-b_x \\ a_y-b_y \\ a_z-b_z \end{pmatrix} \qquad \alpha\mathbf{a} = \begin{pmatrix} \alpha a_x \\ \alpha a_y \\ \alpha a_z \end{pmatrix}
$$

con il significato oramai usuale dei simboli.

Esercizio 1.14. *Determinare le coordinate del vettore* $4\mathbf{a}-5\mathbf{b}$ *sapendo che risulta* $\mathbf{a}=(2,6,1)$ *e* $\mathbf{b}=(-2,3,-3)$. *Si trovi successivamente il suo modulo.*

Esercizio 1.15. *Sono assegnati i vettori* $\mathbf{a}=(3x,2,1)$ *e* $\mathbf{b}=(2y,1,-y)$. *Determinare* x *e* y *in modo che* $\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$.[9]

Esercizio 1.16. *È dato il punto* $A(-3,6)$ *e il vettore* $\mathbf{a}=(5,4)$. *Trovare le coordinate di* B *tale che sia* $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$.

Esercizio 1.17. *I punti* $A(9,5,3)$ *e* $B(-2,7,3)$ *definiscono il vettore* $\overrightarrow{AB}$. *Si determinino le componenti del versore* $\mathbf{e}$, *opposto ad* $\overrightarrow{AB}$.

Esercizio 1.18. *Nel sistema ortonormale di origine* O *e base* $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$ *sono assegnati i punti di coordinate* $A(1,2,3)$, $B(1,0,7)$, $C(3,-2,-5)$. *Considerando questi come i vertici del parallelogramma* $ABCD$, *determinare le coordinate del vertice* D.

Esercizio 1.19. *Sia* $\triangle ABC$ *un triangolo avente le coordinate dei vertici note. Determinare le coordinate del suo baricentro ossia del punto d'incontro delle mediane ai 3 lati.*

Esercizio 1.20. *I vettori* $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$ *e* $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ *sono espressi dalle* $\mathbf{a}=4\mathbf{i}-3\mathbf{j}$ *e* $\mathbf{b}=-7\mathbf{i}+8\mathbf{j}$. *Determinare la rappresentazione cartesiana di* $\overrightarrow{AB}$.

[9] Si veda l'esempio risolto 1.5.

Esercizio 1.21. *Dimostrare che la condizione di collinearità tra due vettori* $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ *può assumere la forma*

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Esercizio 1.22. *Determinare la lunghezza della mediana* $[AM]$ *del triangolo* $\triangle ABC$ *sapendo che* $A(2, 3/2, -4)$, $B(3, -4, 2)$, $C(1, 3, -7)$.

Esercizio 1.23. *L'angolo tra i vettori* $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ *è di* $120°$. *Costruito il vettore* $\mathbf{c} = 4\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ *si determini il suo modulo se* $a = 3$ *e* $b = 4$.

Esercizio 1.24. *Determinare la proiezione del vettore* $\mathbf{a}$ *sull'asse* x *di un sistema ortonormale, se l'angolo* α *tra la direzione positiva dell'asse* x *e quella del vettore risulta: a)* $\alpha = 30°$, $|\mathbf{a}| = 8$*; b)* $\alpha = 45°$, $|\mathbf{a}| = 7$*; c)* $\alpha = 60°$, $|\mathbf{a}| = 6$*; d)* $\alpha = 90°$, $|\mathbf{a}| = 5$*; e)* $\alpha = 120°$, $|\mathbf{a}| = 4$*; f)* $\alpha = 180°$, $|\mathbf{a}| = 3$.

Esercizio 1.25. *Determinare le coordinate del punto terminale* B *del vettore* $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$ *conoscendo le proiezioni di* $\mathbf{a}$ *sugli assi coordinati di un sistema cartesiano e le coordinate di* A*: a)* $\mathbf{a} = (3, 1)$, $A(2, 0)$*; b)* $\mathbf{a} = (-3, 2)$, $A(1, 2)$*; c)* $\mathbf{a} = (-4, 6)$, $A(-2, 7)$.

Esercizio 1.26. *In un parallelepipedo* $ABCDA'B'C'D'$ *i vettori* $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ *sono rappresentati rispettivamente dagli spigoli* AB, AD *e* AA'. *Costruire una rappresentazione grafica di a)* $\mathbf{p}+\mathbf{q}+\mathbf{r}$*; b)* $\frac{1}{2}\mathbf{p} + \frac{1}{2}\mathbf{q} - \mathbf{r}$*; c)* $-\mathbf{p} - \mathbf{q} + \frac{1}{2}\mathbf{r}$.

CAPITOLO 2

2.1 Prodotto scalare

Nel capitolo precedente si sono introdotte due operazioni: la somma vettoriale risulta un'operazione interna all'insieme dei vettori (che indichiamo con $\mathbf{V}$) in quanto associa ad un coppia di elementi di questo insieme un altro vettore ossia

$$\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{V} \xrightarrow{\mathbf{a}+\mathbf{b}} \mathbf{c} \in \mathbf{V}.$$

La moltiplicazione scalare–vettore invece si può intendere come un'operazione che associa ad un elemento dell'insieme prodotto cartesiano $\mathbf{R} \times \mathbf{V}$ un elemento di $\mathbf{V}$

$$(\alpha, \mathbf{a}) \in \mathbf{R} \times \mathbf{V} \xrightarrow{\alpha \mathbf{a}} \mathbf{b} \in \mathbf{V} :$$

è quindi un'operazione esterna. In questo capitolo definiremo due altre operazioni delle quali la prima sarà esterna, la seconda interna.

Siano $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ due vettori dello spazio espressi nella loro decomposizione cartesiana. Vogliamo associare ad essi un numero reale in modo da definire un'operazione esterna del tipo

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

Scegliamo quindi di coinvolgere il prodotto delle coordinate omonime dei due vettori e poiché tale operazione ci fornirà un numero reale assegneremo a questa operazione il nome di *prodotto scalare*: diamo quindi la seguente definizione:

Definizione 2.1. *Dicesi prodotto scalare di due vettori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$, *la somma dei prodotti delle componenti omonime (e quindi relative agli stessi assi): in simboli*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.1}$$

Il simbolo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ esprime quindi un numero reale e pertanto $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbf{R}$. Dalla definizione è facile dimostrare la validità delle seguenti proprietà

Prop. Commutativa. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$,

per α scalare $\qquad \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b})$.

Delle utili relazioni discendono considerando dei casi particolari di (2.1). Difatti nel caso che sia $\mathbf{a}$=$\mathbf{b}$ risulta

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$$

per cui ricordando la (1.12) si ha

$$\mathbf{a} \times \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 = a^2.$$

Si pone pertanto $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{a}^2$. Analogamente se $\mathbf{b} = -\mathbf{a}$ discende $\mathbf{a} \times (-\mathbf{a}) = -|\mathbf{a}|^2 = -a^2 = -\mathbf{a}^2$. Per i versori cartesiani $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ è quindi $\mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = 1$, mentre per i prodotti misti si hanno

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0 \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\ \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Queste ultime relazioni evidenziano come il prodotto scalare tra versori ortogonali ($\mathbf{i} \perp \mathbf{j}$, $\mathbf{i} \perp \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \perp \mathbf{k}$) risulti nullo. Vedremo in seguito che questa è una delle principali conseguenze della definizione.

Un'ulteriore importante proprietà del prodotto scalare è la distributiva rispetto alla somma. Difatti da $\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\mathbf{i} + (a_y + b_y)\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k}$ si ha

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= (a_x + b_x)c_x + (a_y + b_y)c_y + (a_z + b_z)c_z \\ &= a_x c_x + b_x c_x + a_y c_y + b_y c_y + a_z c_z + b_z c_z \\ &= (a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z) + (b_x c_x + b_y c_y + b_z c_z) \\ &= \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}. \end{aligned}$$

Analogamente si dimostra la

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{a} \times \mathbf{d} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{d},$$

da cui discende la

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}+\mathbf{b}) &= (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \\ &= a^2 + b^2 + 2\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

2.2 Una proprietà fondamentale

Il prodotto scalare si dimostra molto utile se lo si associa all'angolo formato dai due vettori fattori. Poiché, d'altra parte, non è possibile ottenere[10] la relazione generale che lega $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ con l'angolo $\angle\mathbf{ab} \leq 180°$, presentiamo in alternativa alcuni esempi allo scopo di arrivare comunque ad una conclusione significativa.

Consideriamo perciò due vettori del piano cartesiano, dei quali il primo abbia componente y nulla: siano $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i}$ e $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j}$ (fig.2.1).

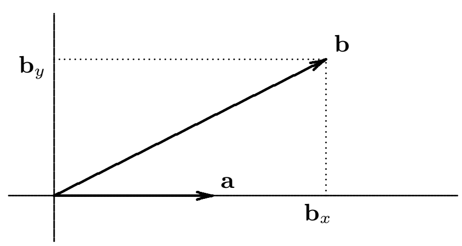


Fig. 2.1 Proiezione del vettore **b** su **a**.

Calcolando il loro prodotto scalare si giunge alla $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = a_xb_x + 0\cdot b_y = a_xb_x$. Questo risultato mostra che il numero $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ sarà positivo quando a_x e b_x sono concordi, negativo se le due componenti sono discordi. Alla prima eventualità corrisponde la situazione di fig.2.2a, alla seconda quella di fig.2.2b.

Se notiamo che $|a_x|$ coincide con il modulo di **a** ($|a_x| = a$) e b_x con la proiezione di **b** lungo la direzione di **a** possiamo, almeno in questo caso, considerare il prodotto scalare equivalente al prodotto del modulo di **a** per la proiezione dell'altro nella direzione di **a**. Indicata quest'ultima come b_a, vale

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = ab_a. \tag{2.3}$$

[10] L'espressione $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = ab\cos\alpha$ con $\alpha = \angle\mathbf{ab}$ si potrà comprendere dopo aver affrontato le nozioni della Goniometria.

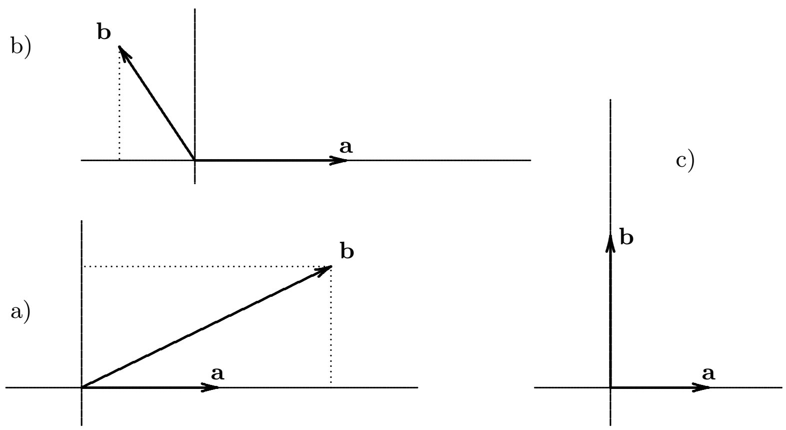


Fig. 2.2 Diverse eventualità per la proiezione del vettore **b** su **a**.

Questo prodotto possiede segno

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} > 0 \iff 0 \leq \angle \mathbf{ab} < 90^\circ$$
$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} < 0 \iff 90^\circ < \angle \mathbf{ab} \leq 180^\circ.$$

Rimane da trattare il caso particolare in cui il vettore **b** formi un angolo di 90° con **a** (fig.2.2c). In tale situazione **b** possiede lo sviluppo $\mathbf{b} = b_y \mathbf{j}$ e quindi $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$. La (2.3) non perde di significato in quanto la proiezione b_a di **b** su **a** è nulla e il prodotto scalare è nullo pure in base a questa espressione. Sembra quindi che il prodotto scalare di due vettori si possa riscrivere in modo alternativo e che esso si annulli quando i due vettori sono perpendicolari[11].

In effetti, sulla base di conoscenze matematiche solo un po' più sofisticate, si dimostra che ciò è vero in generale. Possiamo quindi affermare che qualsiasi sia la coppia di vettori (del piano o dello spazio),

1. il prodotto scalare assume pure la forma

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = a b_a = a_b b :$$

il prodotto scalare $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ è perciò dato anche dal prodotto del modulo di un vettore per la proiezione dell'altro nella direzione definita dal primo o viceversa,

[11] Si annulla pure quando uno dei due fattori è il vettore nullo ma ciò costituisce un caso ovvio e banale.

2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} > 0 \iff 0 \leq \angle \mathbf{ab} < 90°$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} < 0 \iff 90 \leq \angle \mathbf{ab} < 180°$
3. il prodotto scalare di due vettori non nulli **a** e **b** è nullo se e solo se questi sono perpendicolari [12]

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \Longleftrightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b}. \tag{2.4}$$

2.3 Conseguenze ed esercizi

Presentiamo in questo paragrafo alcune interessanti conseguenze ed approfondimenti delle nozioni appena sviluppate: segue quindi un certo numero di esercizi.

Esempio 2.1. *Ricordando la (1.1) sappiamo che le lunghezze delle diagonali di un parallelogramma si esprimono tramite le* $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|$ *e* $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|$. *D'altra parte da (2.2) discende* $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Analogamente si ottiene* $|\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. *Sottraendo la seconda dalla prima si giunge alla*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{4}\left[(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 - (\mathbf{a}-\mathbf{b})^2\right].$$

Se quindi poniamo uguali le diagonali, il parallelogramma si riduce ad un rettangolo: allora da $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|$, *la precedente espressione conduce alla* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0$: *abbiamo quindi ottenuto come conseguenza l'ortogonalità di* **a** *con* **b** *e le due espressioni di partenza si riducono alla* $|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}-\mathbf{b}|^2 = a^2 + b^2$ *che costituisce niente altro che il teorema di Pitagora. Poiché tali argomentazioni possono essere invertite, abbiamo qui una dimostrazione del fatto che l'annullarsi del prodotto scalare implica l'ortogonalità dei due fattori.*

Esercizio 2.1. *In modo analogo a quanto fatto nel precedente esempio, dimostrare che la somma dei quadrati delle lunghezze delle diagonali di un parallelogramma è uguale alla somma dei quadrati delle lunghezze di tutti i suoi lati.*

Esempio 2.2. *Sia* $ABCD$ *un quadrilatero convesso con i lati che soddisfano alla* $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AD}^2$. *Vogliamo determinare l'angolo tra le diagonali* $[AC]$ *e* $[BD]$.

[12] Si veda il successivo esempio 2.1.

Posto quindi $\mathbf{a} = \overrightarrow{AB}$, $\mathbf{b} = \overrightarrow{BC}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{CD}$, *possiamo esprimere il quarto lato e le due diagonali come* $\overrightarrow{AD} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\overrightarrow{AC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BD} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$. *La condizione posta si riscrive come*

$$\mathbf{a}^2 + \mathbf{c}^2 = \mathbf{b}^2 + (\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})^2.$$

Eseguendo il "quadrato" discende

$$a^2 + c^2 = b^2 + a^2 + b^2 + c^2 + 2\mathbf{a} \times \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \times \mathbf{c} + 2\mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

da cui $b^2 + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} = 0$. *D'altra parte il prodotto scalare delle diagonali risulta*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{AC} &= (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\ &= b^2 + \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \end{aligned}$$

che per le conseguenze dell'ipotesi iniziale implica $\overrightarrow{BD} \times \overrightarrow{AC} = 0$. *Pertanto* $[AC] \perp [BD]$.

Esercizio 2.2. *Sapendo che* $|\mathbf{a}| = 13$, $|\mathbf{b}| = 19$, $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 24$, *calcolare* $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

Esercizio 2.3. *Verificare che i vettori* $\mathbf{a} = (3, -5, 1)$ *e* $\mathbf{b} = (2, 6, 24)$ *sono ortogonali.*

Esercizio 2.4. *Determinare le componenti di* $\mathbf{a}$ *sapendo che* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, $\mathbf{b} = (-5, 3)$ *e* $|\mathbf{a}| = \sqrt{17}$.

Esercizio 2.5. *Il vettore* $\mathbf{u}$ *possiede la componente* x *doppia della componente* y *ed è perpendicolare al vettore* $\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$. *Si trovino le componenti di* $\mathbf{u}$ *sapendo che* $|\mathbf{u}| = 5\sqrt{2}$.

Esercizio 2.6. *Dimostrare che* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 - b^2$.

Esercizio 2.7. *I vettori* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *rispettivamente di moduli* $a = 4$, $b = 5$, $c = 3$, *soddisfano alla condizione* $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$. *Determinare* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$.

Esercizio 2.8. *I versori* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$ *non sono collineari e soddisfano alla* $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = 1/\sqrt{13}$. *Calcolare il termine* $(\mathbf{a} - 4\mathbf{b}) \times (-5\mathbf{a} + 6\mathbf{b})$.

Esercizio 2.9. *Dimostrare che il triangolo di vertici* $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(7/5, 1/5)$ *è retto.*

Esercizio 2.10. *Determinare i versori perpendicolari ad* $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Esercizio 2.11. *È dato il triangolo $\triangle ABC$: considerate le mediane ai lati $[AP]$, $[BQ]$, $[CR]$, calcolare il valore dell'espressione* $(\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AP}) + (\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{BQ}) + (\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CR})$.

Esercizio 2.12. *(si veda, per le premesse, l'esercizio 1.8) Posto* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ *e* $|\mathbf{a}| = 1$ *e fissato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali di centro O con ascissa parallela ed equiversa ad* $\mathbf{a}$ *e ordinata parallela ed equiversa a* $\mathbf{b}$, *trovare* $|\mathbf{b}|$ *affinché i due segmenti OC e AB siano perpendicolari.*[13]

Esercizio 2.13. *Dimostrare che le diagonali di un rombo sono tra loro perpendicolari.*

Esercizio 2.14. *Dimostrare che le congiungenti i punti medi dei lati consecutivi di un rombo formano un rettangolo.*

Esercizio 2.15. *La scrittura* $(\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c})\mathbf{a}$ *rappresenta una scrittura valida e in caso affermativo esprime un vettore collineare con* $\mathbf{a}$*?*

Esercizio 2.16. *Determinare il versore* $\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ *perpendicolare al vettore* $\mathbf{b} = y\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ *e tale da formare un angolo acuto con* $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 5\sqrt{6}\mathbf{k}$.

Esercizio 2.17. *In un triangolo $\triangle ABC$ sono noti* $|\overrightarrow{AB}| = c$, $|\overrightarrow{AC}| = b$, $|\overrightarrow{BC}| = a$. *Determinare la lunghezza della mediana $[CM]$.*

Esercizio 2.18. *È dato un rettangolo $ABCD$ ed un punto M. Mostrare che* $\overrightarrow{MA} \times \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} \times \overrightarrow{MD}$. *(Si consiglia di esprimere 3 dei precedenti vettori in termini del quarto e dei lati del rettangolo).*

Esercizio 2.19. *Siano* $\mathbf{u}_1$ *e* $\mathbf{u}_2$ *due versori non collineari. Calcolare* $(2\mathbf{u}_1 - 5\mathbf{u}_2) \times (3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2)$ *sapendo che* $|\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2| = \sqrt{3}$.

Esercizio 2.20. *Determinare le componenti cartesiane del versore* $\mathbf{u}$ *ortogonale ai vettori* $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ *e* $\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Esercizio 2.21. **KK** *In un trapezio rettangolo $ABCD$ le diagonali sono mutuamente perpendicolari. È noto pure il rapporto tra le lunghezze delle basi ossia* $\overline{CD}/\overline{AB} = k$. *Si trovi in quale rapporto stanno le lunghezze delle diagonali.*

Esercizio 2.22. *Calcolare la lunghezza delle diagonali di un parallelogramma costruito tramite i vettori* $\mathbf{a} = \mathbf{p} - 2\mathbf{q}$, $\mathbf{b} = 4\mathbf{p} + \mathbf{q}$ *sapendo che* $p = 2\sqrt{2}$, $q = 3$ *e che* $\angle\mathbf{pq} = 45°$.

Esercizio 2.23. *Dati i due punti $A(2,2)$ e $B(5,-3)$ determinare sull'asse delle ascisse un punto P tale che* $\angle APB = 90°$.

[13] Seconda parte dell'es. n.1 della Mat.'92.

ESERCIZIO 2.24. *Trovare la somma dei quadrati delle mediane di un triangolo note le lunghezze a, b, c dei lati.*

2.4 Prodotto vettoriale

Affrontiamo infine un ultima operazione nell'insieme $\mathbf{V}$ dei vettori. Di questa daremo solo le linee generali in quanto richiede, in misura maggiore che nelle altre, ulteriori conoscenze di goniometria: l'introduzione seguirà quindi una linea più concreta e solo successivamente si proporranno i significati formali. Vogliamo comunque definire un'operazione interna a $\mathbf{V}$ e quindi dovremo associare alla coppia di vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ un vettore che simbolizzeremo come $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Il primo problema che si incontra riguarda la direzione. Dobbiamo costruirci una regola che, partendo dai due vettori $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, sia in grado di fornirci una direzione. Notiamo che, fissati $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ ed applicati allo stesso punto O, risulta in generale (per ora escludiamo che siano paralleli) definito un piano π passante per O e gli estremi A e B di $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ (fig.2.3).

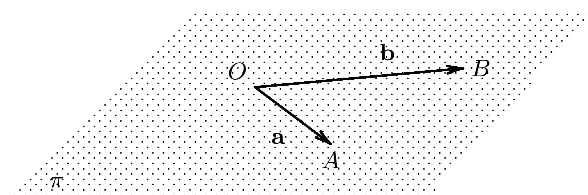


Fig. 2.3 Piano π individuato da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Assegnare una direzione in questo piano o in un piano ad esso parallelo riesce problematico mentre è immediato associare a π una direzione ad esso perpendicolare: difatti tutte le rette perpendicolari a π possiedono la medesima direzione, univocamente determinata appena sono dati i due vettori. Conveniamo quindi di assegnare a $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ la direzione perpendicolare al piano individuato dai due vettori: in tal modo si ha

- $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \perp \mathbf{a} \qquad (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \perp \mathbf{b}$.

Si tratta ora di determinare il verso. A prima vista si potrebbe pensare di utilizzare le nozioni di rotazione oraria e antioraria: per esempio, il verso di $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ potrebbe essere uscente dal piano dei due vettori se la rotazione che porta il primo vettore $\mathbf{a}$ a sovrapporsi al secondo $\mathbf{b}$ attraverso l'angolo minore di 180° risultasse antioraria, o viceversa. Una tale convenzione non sarebbe comunque soddisfacente in quanto la nozione di rotazione oraria e antioraria dipende dal punto di osservazione: difatti se si osserva la rotazione da punti appartenenti a ciascuno dei due semispazi formati dal piano π, si ottengono risultati opposti.

Prendiamo invece una comune vite avvitata su una sottile tavola di legno. Questa, solo se ruotata in un certo modo avanza, mentre per estrarla la si deve ruotare nel verso opposto. Un tale comportamento rimane immutato se si guarda dall'altro lato della tavola: ancora per farla avanzare nello stesso verso di prima bisogna ruotarla nello stesso modo.

Un tale oggetto quindi permette di associare univocamente ad un verso di rotazione un verso di avanzamento. Poiché comunque esistono viti (poche) che si comportano diversamente (le prime si dicono destrorse, queste ultime sinistrorse), conviene rifarci ad un oggetto che, per ora esiste solo nella versione "destrorsa" ed è noto a tutti: il *cavatappi*. Possiamo quindi in definitiva proporre la regola per il verso di $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$:

- $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ possiede il verso di avanzamento di un cavatappi fatto ruotare concordemente alla rotazione che sovrappone il primo vettore $\mathbf{a}$ sul secondo $\mathbf{b}$, attraverso l'angolo convesso $\alpha < 180°$.

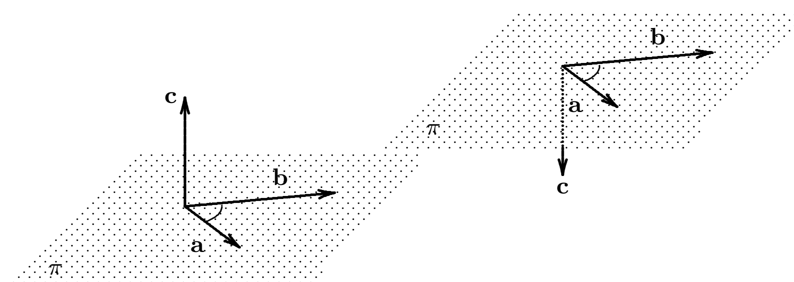


Fig. 2.4 Anticommutatività del prodotto vettoriale.

Le conseguenze di una tale posizione sono immediate: osservando la figura 2.4 risulta evidente che $(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) \uparrow\downarrow (\mathbf{b} \wedge \mathbf{a})$ e quindi che i due vettori possiedono versi opposti. Se quindi assegnamo ad essi lo stesso modulo l'operazione che stiamo definendo e che chiameremo *prodotto vettoriale* risulterebbe anticommutativa ossia tale che $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$.

Il modulo di $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ si conviene di considerarlo pari all'area del parallelogramma definito da $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ per cui, detto b_n il modulo della componente di $\mathbf{b}$

perpendicolare ad **a** (e a_n quello di **a** perpendicolare a **b**), si pone (fig.2.5)

- $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| \cdot b_n = a \cdot b_n = a_n \cdot b$.

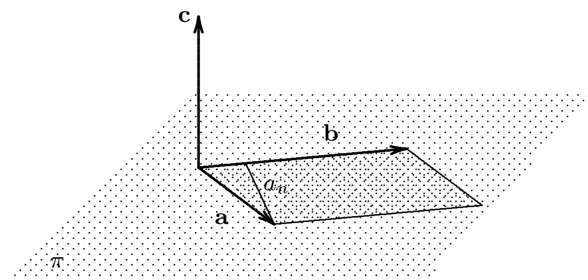


Fig. 2.5 Interpretazione geometrica di $|\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}|$.

Poiché questo scalare non cambia se si considera $\mathbf{b}\wedge\mathbf{a}$ ne segue che il prodotto vettoriale non è commutativo ma anticommutativo: in definitiva vale la

Proprietà anticommutativa. $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = -\mathbf{b} \wedge \mathbf{a}$.

Ci chiediamo ora quale sia la la decomposizione cartesiana di $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$: i vettori **a** e **b** siano espressi dalle

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k};$$

Come già detto, la risposta ad una tale domanda presuppone conoscenze di goniometria non ancora acquisite, pertanto l'espressione che ne risulta verrà data senza dimostrazione: il prodotto vettoriale in termini delle componenti cartesiane di **a** e **b**, si esprime comunque come

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = (a_yb_z - a_zb_y)\mathbf{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\mathbf{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\mathbf{k}, \qquad (2.5)$$

per cui le componenti di **c** sono

$$c_x = a_yb_z - a_zb_y \qquad c_y = a_zb_x - a_xb_z \qquad c_z = a_xb_y - a_yb_x.$$

Una tale espressione risulta difficile da memorizzare per cui si ricorre ad una scrittura formale alternativa, detta *determinante* e del tipo

$$\mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \qquad (2.6)$$

L'espressione (2.5) si ottiene dalla precedente sviluppando il determinante rispetto agli elementi della prima riga[14]. È quindi in definitiva

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \qquad c_y = - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \qquad c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

2.5 Proprietà

La già ricordata proprietà anticommutativa si accompagna ad altre proprietà del prodotto vettore, tutte dimostrabili con relativa facilità utilizzando le espressioni (2.5), (2.6). Si provi comunque, data l'immediatezza, a verificare l'anticommutatività tramite l'uso della (2.6).[15] La altre sono:

Proprietà associativa rispetto al fattore scalare.

$$\forall \alpha \in \mathbf{R} \quad \alpha(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (\alpha \mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} = \mathbf{a} \wedge (\alpha \mathbf{b}).$$

Proprietà distributiva rispetto alla somma vettoriale.

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \wedge \mathbf{c}).$$

Proponiamo infine alcuni utili esempi ed esercizi per chiarire l'uso delle nozioni appena introdotte.

Esempio 2.3. *Per dimostrare che* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = \mathbf{0}$ *si possono seguire due diverse vie. La più sintetica fa uso della proprietà anticommutativa per cui, commutando i fattori, dev'essere* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{a} = -\mathbf{a} \wedge \mathbf{a}$*. Ne segue che il vettore prodotto* $\mathbf{c}$ *è uguale al proprio opposto* $-\mathbf{c}$ *e ciò può essere vero solo per il vettore nullo* $\mathbf{0}$.
L'altra si basa sullo sviluppo del determinante (2.6) che è ora

$$\begin{aligned} \mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y a_z - a_z a_y)\mathbf{i} + (a_z a_x - a_x a_z)\mathbf{j} + (a_x a_y - a_y a_x)\mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0} : \end{aligned}$$

come si vede un determinante con due righe uguali si annulla.

[14] Si veda l'appendice A per come vanno sviluppati i determinanti.

[15] In effetti, per le proprietà dei determinanti, scambiando due righe in un determinante, questo cambia segno.

Esercizio 2.25. *In modo analogo a quanto svolto nel precedente esempio, dedurre che se* $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$ *ossia se i due fattori sono collineari, il loro prodotto vettoriale si annulla.*[16] *Poiché inoltre vale pure l'implicazione opposta, abbiamo la possibilità di riscrivere la condizione di collinearità in modo alternativo: allora*

$$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Esempio 2.4. *Dati* $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ *e* $\mathbf{b} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ *calcoliamo in base alla (2.6) il vettore* $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$*. Sostituendo i valori si ha*

$$\mathbf{c} = (-2 \cdot 2 - 3(-1))\mathbf{i} - (3 \cdot 2 - 4(-1))\mathbf{j} + (3 \cdot 3 - 4(-2))\mathbf{k}.$$

Si noti come nel secondo termine del secondo membro compaia il fattore -1 *e ciò a causa della somma dispari degli indici che identificano la posizione di* $\mathbf{j}$ *nel determinante (prima riga, seconda colonna* $\rightarrow 1 + 2 = 3$*).*

Esercizio 2.26. *Assegnati* $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$*, calcolare* $(\mathbf{a} - 3\mathbf{b}) \wedge (-2\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Esercizio 2.27. *Dimostrare le importanti relazioni seguenti:*

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j} \\ \mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i} \\ \mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j} & \mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i} & \mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{0}. \end{array}$$

Esercizio 2.28. *Tenendo presente la proprietà di perpendicolarità tra vettori, dimostrare che* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ *è perpendicolare ad* $\mathbf{a}$ *e* $\mathbf{b}$.

Esercizio 2.29. *La condizione di appartenenza di tre vettori* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *al medesimo piano* π *si scrive come*
condizione di complanarità: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \in \pi \iff \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = 0.$
Si cerchi di trovarne una giustificazione formale.

Esercizio 2.30. *Assegnati i vettori noti* $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$*, esprimere i vettori* $(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \wedge (\mathbf{a} - \mathbf{b})$ *e* ${}^1\!/_2(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \wedge (-{}^1\!/_2\mathbf{a} + \mathbf{b})$ *in termini di* $\mathbf{c} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$.

Esercizio 2.31. *Si dica, giustificando opportunamente l'affermazione, se l'espressione* $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ *rappresenta un vettore o uno scalare. Dati quindi* $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{c} = x\mathbf{j} + \mathbf{k}$ *si determini l'espressione data. Nel caso che* $x = -{}^3\!/_4$ *a quale conclusione si può giungere?*

[16] È questa un'altra proprietà generale dei determinanti: se due righe di un determinante sono proporzionali, il determinante si annulla.

Esercizio 2.32. *Si dica se i vettori* $\mathbf{a} = (1, 0, -1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 0)$, $\mathbf{c} = (2, 0, -3)$ *sono complanari.*

Esercizio 2.33. *Assegnati i vettori* $\mathbf{a} = (1, 0, -2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 1)$, *determinare i versori* $\mathbf{d}$ *che soddisfano contemporaneamente alle* $\mathbf{d} \perp \mathbf{a}$ *e* $\mathbf{d} \perp \mathbf{b}$, *evitando di utilizzare la nozione di prodotto scalare.*

Esercizio 2.34. *Determinare i vettori* $\mathbf{a} = (x, 1, 0)$ *e* $\mathbf{b} = (y, -2, 10)$ *in modo che questi risultino non solo mutuamente perpendicolari, ma pure complanari a* $\mathbf{c} = (1, 1, 1)$.

Esercizio 2.35. *I vettori* $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (1, 5, 1)$ *applicati allo stesso punto definiscono un triangolo* Δ. *Trovare l'area di* Δ.

Esercizio 2.36. *Dimostrare che i punti individuati dalle coppie* $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ *giacciono in uno stesso piano.*

Esercizio 2.37. *Calcolare l'espressione* $2\mathbf{i} \times \mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + 3\mathbf{j} \times \mathbf{i} \wedge \mathbf{k} + 5\mathbf{k} \times \mathbf{i} \wedge \mathbf{j}$.

Appendice A

Matrici e determinanti

Diamo qui una breve rassegna del significato di matrice e di determinante. In particolare ci soffermeremo sulle procedure di calcolo dei determinanti di 2° e 3° ordine.

Una *matrice* è una disposizione rettangolare ordinata di numeri, detti gli *elementi* della matrice. Questa è strutturata in righe e colonne. Una matrice rettangolare $m \times n$ contiene pertanto m righe ed n colonne. Per esempio, le due scritture seguenti identificano la medesima matrice di 3 righe e 4 colonne

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & -10 \\ 5 & -1 & 10 & 2.5 \\ 0 & -7 & -2 & 0.5 \end{pmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} 2 & -4 & 1 & -10 \\ 5 & -1 & 10 & 2.5 \\ 0 & -7 & -2 & 0.5 \end{Vmatrix}.$$

Una matrice con un egual numero di righe e colonne cioè del tipo $n \times n$ si dirà una matrice quadrata di ordine n. Allora le seguenti matrici sono nell'ordine una matrice quadrata di ordine 2 e 3

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 10 \\ -15 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

In generale quindi una matrice potrà assumere la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

dove si sono individuati i diversi elementi in base alla loro riga e colonna. Nel caso particolare di matrici quadrate di ordine 2 e 3 si ha

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Ad ogni matrice si può associare un numero il *determinante* della matrice. Per esempio, i determinanti che contraddistinguono le due matrici sopra si simbolizzano come

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Lo scopo che ci proponiamo è quello di presentare le regole di calcolo di questi determinanti.

Per il determinante di secondo ordine si pone

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{1}$$

ossia lo si considera pari alla differenza del prodotto dei termini appartenenti alla diagonale principale della matrice con quello dei termini della diagonale secondaria.

In seguito a questa definizione è facile verificare che se nelle due righe compaiono elementi corrispondenti proporzionali allora il determinante è nullo. Difatti le espressioni

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \iff a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$$

sono del tutto equivalenti: ma dalla $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$, portando tutto a primo membro si ottiene l'espressione nulla del determinante.

Per estendere tale regola al calcolo di determinanti di matrici di ordine superiore al secondo osserviamo che per la matrice quadrata del terzo ordine possiamo costruire il numero

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \tag{2}$$

e quindi procedere come nel caso dei determinanti del secondo ordine. Come si vede si è moltiplicato ciascun elemento della prima riga per il determinante di un ordine inferiore ottenuto omettendo la riga e la colonna del termine in considerazione e infine si sono sommati i tre prodotti così ottenuti.

Ci si può però chiedere perché il secondo termine a differenza degli altri due possiede un coefficiente negativo: la risposta si trova nel fatto che si vuole, se possibile, mantenere valida l'osservazione fatta per il determinante di 2° ordine ossia che un determinante si annulli quando vi sono due righe di elementi corrispondenti proporzionali. Difatti solo con tale scelta questa proprietà rimane valida: si provi per esempio a calcolare il "determinante" di

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

senza porre il coefficiente negativo del secondo termine: la proprietà cercata non sussiste più!

Osservando la definizione (2) possiamo notare che il coefficiente negativo compare a fattore del termine a_{12} di indici 12, mentre a_{11} e a_{13} hanno coefficiente positivo. Nel primo caso la somma degli indici è dispari $(1+2=3)$, negli altri due $(1+1=2,\ 1+3=4!)$ la medesima somma fornisce dei numeri pari. Se quindi associamo nello sviluppo (2), ai termini aventi come somma degli indici un numero pari, il coefficiente positivo $+1$ mentre agli altri il numero negativo -1, abbiamo una regola che soddisfa la proprietà dell'annullamento del determinante.

Poiché si dimostra che il determinante non cambia se lo sviluppo viene eseguito rispetto agli elementi di una qualsiasi altra riga (e non solo della prima) o qualsiasi colonna, manteniamo la (2) come la definizione di determinante per una matrice di ordine 3. In maniera del tutto analoga si può estendere questa definizione a matrici quadrate di qualsiasi ordine.

Diamo, per concludere, un elenco delle ulteriori principali proprietà che discendono da una tale definizione:

1. *Il valore di un determinante non cambia se si scambiano le righe con le colonne, cioè*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2. *Lo scambio di due righe o due colonne di un determinante equivale a moltiplicarlo per* -1.

3. *Moltiplicare tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) per un numero α equivale a moltiplicare per α il determinante,*

$$\begin{vmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 & \alpha c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. *Se tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) sono nulli allora lo è pure il determinante.*

È superfluo infine ricordare come, nell'ambito della teoria riguardante i sistemi lineari di primo grado, queste regole facilitino la risoluzione dei sistemi contenenti 2 o più incognite.

Appendice B

ALFABETO GRECO : minuscole

α	alfa	β	beta	γ	gamma	δ	delta
ϵ	epsilon	ζ	zeta	η	eta	θ	theta
ι	iota	κ	kappa	λ	lambda	μ	mu (o mi)
ν	nu (ni)	ξ	xi	o	ómicron	π	pi
ρ	rho	σ	sigma	τ	tau	υ	üpsilon
ϕ	phi	χ	chi	ψ	psi	ω	omega

ALFABETO GRECO: maiuscole

A	Alfa	B	Beta	Γ	Gamma	Δ	Delta
E	Epsilon	Z	Zeta	H	Eta	Θ	Theta
I	Iota	K	Kappa	Λ	Lambda	M	Mu (o Mi)
N	Nu (Ni)	Ξ	Xi	O	Ómicron	Π	Pi
P	Rho	Σ	Sigma	T	Tau	Υ	Üpsilon
Φ	Phi	X	Chi	Ψ	Psi	Ω	Omega

Per correzioni e suggerimenti: `mailto:` LRoi@mclink.it