Esercizi di applicazione

Lorenzo Roi

■ Istruzioni

Si presentano diversi esercizi dai più semplici a quelli più impegnativi utilizzando le funzioni del pacchetto **RettaFasci.m**.

```
Cliccare qui per caricare il pacchetto
```

Modificare il percorso sottostante sostituendolo con quello effettivo contenente il pacchetto **RettaFasci.m** (ponendo attenzione alle maiuscole-minuscole e alla lettera dell'unità) e quindi avviare il calcolo delle tre celle successive cliccando sul pulsante sopra.

```
SetDirectory["C:/Documents and Settings/Lorenzo/Documenti/rette"];
```

```
Needs["Miscellaneous`RealOnly`"]
<< RettaFasci.m
```

I successivi due comandi eliminano gli avvisi riguardante la definizione e l'uso di termini con uno spelling simile.

```
Off[General::spell];
Off[General::spell1];
```

Dopo ogni esercizio, prima di passare al successivo, conviene cancellare i simboli usati attivando la cella posta prima del testo.

1. Esercizi elementari

Esercizio 1.1

```
Clear["Global`*"]
```

▼ Determinare la retta s per $A(1, 2)$ parallela alla retta $r: 2x - 3y - 4 = 0$.

Definiti gli elementi dati dal problema

```
puntoA = {1, 2};
r = 2 x - 3 y - 4 == 0;
```

possiamo sfruttare direttamente la funzione

```
s1 = rettaParallela[puntoA, r]
```

$4 + 2x - 3y == 0$

oppure, individuare il coefficiente angolare di *r*

```
mr = coefficienteAngolare[r]
```

$\frac{2}{3}$

e quindi procedere con

```
s2 = rettaParallela[puntoA, mr]
```

$-\frac{4}{3} - \frac{2x}{3} + y == 0$

Le due rette coincidono: difatti riportate entrambe alla forma esplicita

```
equazioneEsplicita /@ {s1, s2}
```

$\left\{y == \frac{4}{3} + \frac{2x}{3},\ y == \frac{4}{3} + \frac{2x}{3}\right\}$

otteniamo la medesima equazione.

Esercizio 1.2

```
Clear["Global`*"]
```

▼ Determinare la retta t per $A(1, 2)$ perpendicolare al segmento di estremi $B(-1, -2)$, $C(2, -3)$.

Definiti gli elementi del problema

```
{puntoA = {1, 2},
 puntoB = {-1, -2},
 puntoC = {2, -3}}
```

```
{{1, 2}, {-1, -2}, {2, -3}}
```

il coefficiente angolare della retta *BC* risulta

```
mBC = coefficienteAngolare[puntoB, puntoC]
```

$-\frac{1}{3}$

cosicché la retta richiesta è

```
t = rettaPerpendicolare[puntoA, mBC]
```

```
1 - 3 x + y == 0
```

Nella forma esplicita

```
equazioneEsplicita[t]
```

```
y == -1 + 3 x
```

appare evidente che il suo coefficiente angolare è l'opposto del reciproco di mBC.

Esercizio 1.3

```
Clear["Global`*"]
```

▼ **Determinare il punto simmetrico di $A(-2, 3)$ rispetto alla retta $r: 4x - 2y + 1 = 0$.**

Definiti punto A e retta r

```
{puntoA = {-2, 3},
 r = 4 x - 2 y + 1 == 0}
```

```
{{-2, 3}, 1 + 4 x - 2 y == 0}
```

determiniamo la retta s perpendicolare a r per A

```
s = rettaPerpendicolare[puntoA, r]
```

```
8 - 2 x - 4 y == 0
```

Questa retta interseca r in M

```
puntoM = puntoIntersezione[r, s]
```

$$\left\{\frac{3}{5}, \frac{17}{10}\right\}$$

cosicché, detto $P_0(x_0, y_0)$ il punto simmetrico di A

```
puntoP0 = {x0, y0}
```

```
{x0, y0}
```

le sue coordinate devono soddisfare alla condizione

```
eq = puntoM == puntoMedio[puntoA, puntoP0]
```

$$\left\{\frac{3}{5}, \frac{17}{10}\right\} == \left\{\frac{1}{2}(-2 + x0), \frac{3 + y0}{2}\right\}$$

Questo risultato costituisce un sistema di due equazioni: risolto fornisce il punto cercato.

```
sol = Solve[eq, {x0, y0}]
```

$$\left\{\left\{x0 \to \frac{16}{5}, y0 \to \frac{2}{5}\right\}\right\}$$

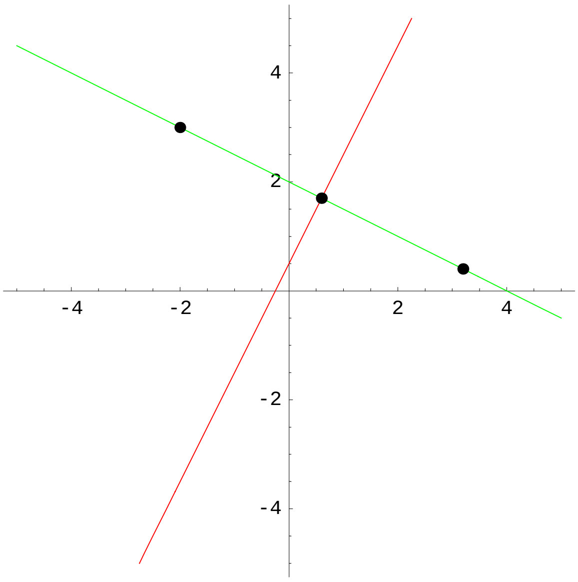
Abbiamo quindi che

```
puntoP0 = Flatten[puntoP0 /. sol]
```

$$\left\{\frac{16}{5}, \frac{2}{5}\right\}$$

La situazione grafica discussa è rappresentata sotto

```
Show[graficoRette[{r, s}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, PlotStyle → colore /@ {rosso, verde},
   DisplayFunction → Identity], Graphics[{PointSize[0.02], Point /@ {puntoA, puntoM, puntoP0}}],
  Axes → True, AspectRatio → Automatic, DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



2. Esercizi di primo livello

Esercizio 2.1

```
Clear["Global`*"]
```

▼ **Verificare che i punti $A(1, 2)$, $B(-2, 1)$ e $C(0, -2)$ non sono allineati e che quindi determinano un triangolo, di cui si chiedono:**
a) le equazioni dei lati;
b) le equazioni delle parallele ai lati condotte dai vertici opposti;
c) il perimetro e l'area;
d) il circocentro.

Definiti i tre punti

```
{puntoA = {1, 2},
 puntoB = {-2, 1},
 puntoC = {0, -2}}
```

```
{{1, 2}, {-2, 1}, {0, -2}}
```

analizziamo se essi sono collineari ossia

```
puntiCollineari[puntoA, puntoB, puntoC]
```

```
False
```

a) Non essendo allineati, determiniamo le equazioni delle rette comprendenti i lati

```
{rettaAB = retta2Punti[puntoA, puntoB],
 rettaBC = retta2Punti[puntoB, puntoC], rettaCA = retta2Punti[puntoC, puntoA]}
```

```
{5 + x - 3 y == 0, 4 + 3 x + 2 y == 0, 2 - 4 x + y == 0}
```

b) Le rette parallele a queste per il vertice opposto si ottengono invece come

```
{parallelaAB = rettaParallela[puntoC, rettaAB],
 parallelaBC = rettaParallela[puntoA, rettaBC], parallelaCA = rettaParallela[puntoB, rettaCA]}
```

```
{-6 + x - 3 y == 0, -7 + 3 x + 2 y == 0, -9 - 4 x + y == 0}
```

c) le lunghezze dei lati risultano

```
lati = {latoAB = distanza2Punti[puntoA, puntoB],
  latoBC = distanza2Punti[puntoB, puntoC], latoCA = distanza2Punti[puntoC, puntoA]}
```

$\{\sqrt{10}, \sqrt{13}, \sqrt{17}\}$

per cui il perimetro vale

```
perimetro = latoAB + latoBC + latoCA
```

$\sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{17}$

oppure, in forma alternativa

```
Apply[Plus, lati]
```

$\sqrt{10} + \sqrt{13} + \sqrt{17}$

L'area si può determinare con la formula che la esprime in funzione delle coordinate dei vertici

```
areaABC = areaTriangolo[puntoA, puntoB, puntoC]
```

$\frac{11}{2}$

oppure trovando la distanza di un vertice (altezza) dal lato opposto (base)

```
altezzaCH = distanzaPuntoRetta[puntoC, rettaAB]
```

$\frac{11}{\sqrt{10}}$

e quindi

```
areaABC = 1/2 latoAB altezzaCH
```

$\frac{11}{2}$

Infine il circocentro si individua come l'intersezione degli assi di due lati. Determinati i punti medi

```
{puntoMedioAB = puntoMedio[puntoA, puntoB], puntoMedioBC = puntoMedio[puntoB, puntoC]}
```

$\left\{\left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}, \left\{-1, -\frac{1}{2}\right\}\right\}$

i due assi sono

```
{asseAB = rettaPerpendicolare[puntoMedioAB, rettaAB],
 asseBC = rettaPerpendicolare[puntoMedioBC, rettaBC]}
```

$\left\{-3\,x - y == 0, \frac{1}{2} + 2\,x - 3\,y == 0\right\}$

e la loro intersezione fornisce il circocentro

```
circocentro = puntoIntersezione[asseAB, asseBC]
```

$\left\{-\frac{1}{22}, \frac{3}{22}\right\}$

Esercizio 2.2

```
Clear["Global`*"]
```

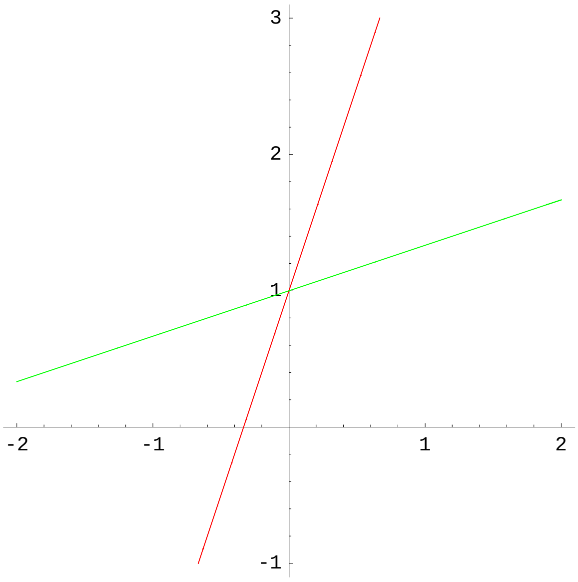
▼ **Sono date le rette $a: y = 3x + 1$ e $b: y = \frac{1}{3}x + 1$ e siano c e d le bisettrici degli angoli formati da a e b, rispettivamente di coefficiente angolare positivo e negativo. Determinare il rapporto dell'area del triangolo formato da a, d e dall'asse x, con l'area del triangolo definito da b, c e l'asse x.**

Dopo averle definite,

```
a = y == 3 x + 1;
b = y == 1/3 x + 1;
```

proponiamo innanzitutto un disegno delle rette a e b

```
graficoRette[{a, b}, {x, -2, 2}, {y, -1, 3}, PlotStyle → {colore[rosso], colore[verde]} ];
```



Entrambe passano per il punto $R(0, 1)$ e possiedono coefficienti angolari uno reciproco dell'altro (vedere alla fine dell'esercizio per un metodo alternativo). Essendo le bisettrici i luoghi dei punti equidistanti dalle rette determiniamo le equazioni di queste due rette che, per note proprietà di geometria elementare, risulteranno mutuamente perpendicolari. Definito quindi un punto generico $P(x, y)$

```
puntoP = {x, y};
```

l'equazione che ne risulta ponendo uguali le sue distanze dalle due rette è

```
equaz = distanzaPuntoRetta[puntoP, a] == distanzaPuntoRetta[puntoP, b]
```

$$\frac{\text{Abs}[-1 - 3x + y]}{\sqrt{10}} == \frac{3\,\text{Abs}\left[-1 - \frac{x}{3} + y\right]}{\sqrt{10}}$$

Questa possiede le soluzioni

```
sol = Solve[equaz, y]
```

```
{{y → 1 - x}, {y → 1 + x}}
```

Dobbiamo manipolare questa espressione per trasformarla in due equazioni da assegnare ai simboli d (rappresentativo della bisettrice con coefficiente angolare negativo) e c (bisettrice di coefficiente angolare positivo) per cui

```
{d, c} = Flatten[Apply[Equal, sol, {2}]]
```

```
{y == 1 - x, y == 1 + x}
```

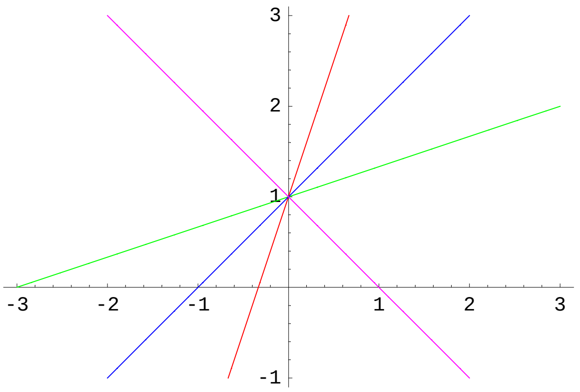
Le rette c e d sono pertanto descritte dalle equazioni

```
{c, d}
```

```
{y == 1 + x, y == 1 - x}
```

e i rispettivi coefficienti angolari evidenziano come le bisettrici siano mutuamente perpendicolari. Riportiamo tutte le rette finora trattate in un unico grafico

```
graficoRette[{a, b, c, d}, {x, -3, 3},
  {y, -1, 3}, PlotStyle → colore /@ {rosso, verde, blu, magenta}];
```



Per determinare il rapporto delle aree dei triangoli avente per vertice comune il punto $R(0, 1)$ e definiti dalle terne $\{a, d, \text{asse } x\}$ e $\{b, c, \text{asse } x\}$ è sufficiente trovare quello dei segmenti individuati sull'asse x visto che le altezze dei due triangoli sono le medesime. Questi punti si ottengono

```
{puntoA = puntoIntersezione[a, y == 0],
 puntoB = puntoIntersezione[b, y == 0],
 puntoC = puntoIntersezione[c, y == 0],
 puntoD = puntoIntersezione[d, y == 0]}
```

$$\left\{\left\{-\frac{1}{3}, 0\right\}, \{-3, 0\}, \{-1, 0\}, \{1, 0\}\right\}$$

e il rapporto delle aree risulta infine

$$\frac{A\ (\triangle \mathrm{ADR})}{A\ (\triangle \mathrm{BCR})} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}}$$

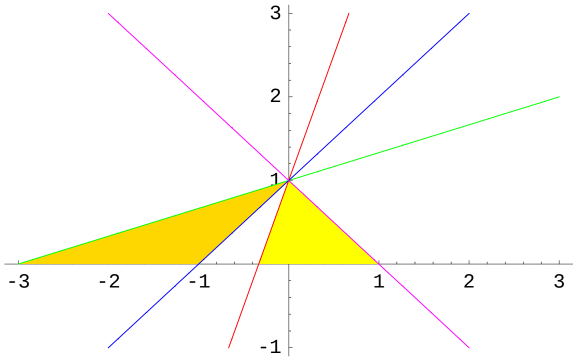
ossia

$$\frac{\texttt{distanza2Punti[puntoA, puntoD]}}{\texttt{distanza2Punti[puntoB, puntoC]}}$$

$$\frac{2}{3}$$

Una ulteriore rappresentazione grafica della situazione risulta essere la seguente

```
Show[Graphics[{{colore[oro], Polygon[{puntoB, puntoC, {0, 1}}]},
    {colore[giallo], Polygon[{puntoA, puntoD, {0, 1}}]}}],
  graficoRette[{a, b, c, d}, {x, -3, 3}, {y, -1, 3}, DisplayFunction → Identity,
   PlotStyle → colore /@ {rosso, verde, blu, magenta}], Axes → True];
```



Come accennato sopra, notato che i coefficienti angolari delle rette a e b sono reciproci, ne segue che le medesime rette formano con il semiasse positivo delle x angoli complementari. La bisettrice c deve perciò individuare con il medesimo asse un angolo di 45°. È allora immediato determinare l'equazione di c e di conseguenza quella di d.

Esercizio 2.3

```
Clear["Global`*"]
```

▼ **Dato il triangolo avente i lati sulle rette di equazione $a: y = \frac{4}{3}x$, $b: y = 4$, $c: x + y - 14 = 0$ determinare:**
a) le equazioni degli assi del triangolo e le coordinate del circocentro;
b) i punti P del piano situati a distanza 2 dall'asse delle ordinate e $\frac{5}{2}\sqrt{10}$ dal circocentro.

a) Definiamo le tre rette del problema

```
{a = y == 4/3 x,
 b = y == 4,
 c = x + y - 14 == 0}
```

```
{y == 4 x/3, y == 4, -14 + x + y == 0}
```

e determiniamo i vertici del triangolo ABC come intersezioni delle rette contenenti i lati

```
{puntoA = puntoIntersezione[a, b],
 puntoB = puntoIntersezione[b, c],
 puntoC = puntoIntersezione[c, a]}
```

```
{{3, 4}, {10, 4}, {6, 8}}
```

Le equazioni degli assi verranno costruite a partire dai punti medi e dalle rette a, b e c (in alternativa si possono ottenere individuandoli come luoghi). Pertanto i punti medi dei lati sono

```
{puntoP = puntoMedio[puntoA, puntoB],
 puntoQ = puntoMedio[puntoB, puntoC],
 puntoR = puntoMedio[puntoC, puntoA]}
```

$$\left\{\left\{\frac{13}{2}, 4\right\}, \{8, 6\}, \left\{\frac{9}{2}, 6\right\}\right\}$$

e le equazioni dei tre assi risultano

```
{asseAB = rettaPerpendicolare[puntoP, b],
 asseBC = rettaPerpendicolare[puntoQ, c], asseCA = rettaPerpendicolare[puntoR, a]}
```

$$\left\{-\frac{13}{2} + x == 0,\ -2 + x - y == 0,\ -\frac{25}{2} + x + \frac{4\,y}{3} == 0\right\}$$

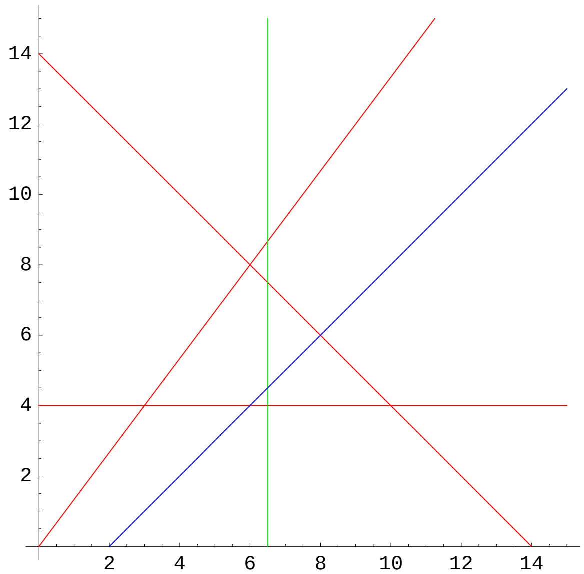
Per ottenere il circocentro basta intersecare due qualunque di queste rette

```
circocentro = puntoIntersezione[asseAB, asseBC]
```

$$\left\{\frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right\}$$

b) Rappresentiamo in figura la situazione geometrica appena studiata: in color rosso appaiono le rette date mentre, in verde e blu, due dei tre assi.

```
graficoRette[{a, b, c, asseAB, asseBC}, {x, 0, 15},
  {y, 0, 15}, PlotStyle → colore /@ {rosso, rosso, rosso, verde, blu}];
```



Per determinare i punti P richiesti definiamo le loro coordinate come incognite

```
puntoP = {x0, y0}
```

```
{x0, y0}
```

e imponiamo le due condizioni proposte dal testo ossia che la loro distanza dal circocentro abbia il valore $\frac{5}{2}\sqrt{10}$

```
eq1 = distanza2Punti[circocentro, puntoP] == 5/2 Sqrt[10]
```

$$\sqrt{\left(-\frac{13}{2}+x0\right)^2+\left(-\frac{9}{2}+y0\right)^2}==5\sqrt{\frac{5}{2}}$$

così come la distanza dall'asse delle ordinate dev'essere pari a 2

```
eq2 = Abs[x0] == 2
```

```
Abs[x0] == 2
```

Anziché ricercare direttamente le soluzioni del sistema di queste due equazioni e dato che, per la seconda, le soluzioni appaiono immediate e cioè $x_0 = 2 \vee x_0 = -2$, determiniamo in corrispondenza i valori di y_0. Se quindi $x_0 = 2$ la prima condizione fornisce

```
sol1 = Solve[eq1 /. {x0 → 2}, y0]
```

```
{{y0 → -2}, {y0 → 11}}
```

mentre in corrispondenza di $x_0 = -2$

```
sol2 = Solve[eq1 /. {x0 → -2}, y0]
```

```
{}
```

non otteniamo alcuna soluzione. I punti del piano richiesti sono pertanto

```
puntoP /. sol1 /. x0 → 2
```

```
{{2, -2}, {2, 11}}
```

Esercizio 2.4

```
Clear["Global`*"]
```

▼ **Assegnati i due punti $A(1, 2)$ e $C(2, 4)$, estremi di una diagonale di un rombo $ABCD$ di area $\frac{5}{2}$, di determinino i rimanenti due vertici e il perimetro di $ABCD$.**

Definiti i vertici

```
puntoA = {1, 2};
puntoC = {2, 4};
```

calcoliamo il punto medio della diagonale AC

```
puntoM = puntoMedio[puntoA, puntoC]
```

$\left\{\frac{3}{2}, 3\right\}$

e costruiamo l'asse di AC dopo aver trovato l'equazione della retta AC

```
rettaAC = retta2Punti[puntoA, puntoC]
```

$-2x + y == 0$

```
asseAC = rettaPerpendicolare[puntoM, rettaAC]
```

$-\frac{15}{2} + x + 2y == 0$

Le due rette possiedono coefficienti angolari opposti e reciproci, come aspettato.

```
coefficienteAngolare /@ {rettaAC, asseAC}
```

$\left\{2, -\frac{1}{2}\right\}$

I vertici B e D del rombo appartengono a quest'ultima retta per cui, introdotte le incognite

```
p0 = {x0, y0}
```

{x0, y0}

la condizione di appartenenza permette di sostituire questa coppia nell'equazione dell'asse

```
eq1 = appartenenzaPuntoRetta[p0, asseAC]
```

$-\frac{15}{2} + x0 + 2\,y0 == 0$

La seconda condizione si ottiene imponendo che l'area abbia il valore richiesto: poiché

```
lunghezzaAC = distanza2Punti[puntoA, puntoC]
```

$\sqrt{5}$

e

```
lunghezzaP0M = distanzaPuntoRetta[p0, rettaAC]
```

$\frac{\text{Abs}[-2\,x0 + y0]}{\sqrt{5}}$

l'area del rombo risulta

```
eq2 = lunghezzaAC lunghezzaP0M == 5 / 2
```

$$\text{Abs}[-2\,x0 + y0] == \frac{5}{2}$$

Risolvendo queste due equazioni (trascurare il messaggio del kernel di *Mathematica*)

```
sol = Solve[{eq1, eq2}, {x0, y0}]
```

$$\left\{\left\{x0 \to \frac{1}{2},\ y0 \to \frac{7}{2}\right\},\ \left\{x0 \to \frac{5}{2},\ y0 \to \frac{5}{2}\right\}\right\}$$

si ottengono i punti *B* e *D*

```
{puntoB, puntoD} = p0 /. sol
```

$$\left\{\left\{\frac{1}{2},\ \frac{7}{2}\right\},\ \left\{\frac{5}{2},\ \frac{5}{2}\right\}\right\}$$

Il perimetro ora si calcola facilmente

```
perimetroABCD = 4 distanza2Punti[puntoA, puntoB]
```

$$2\sqrt{10}$$

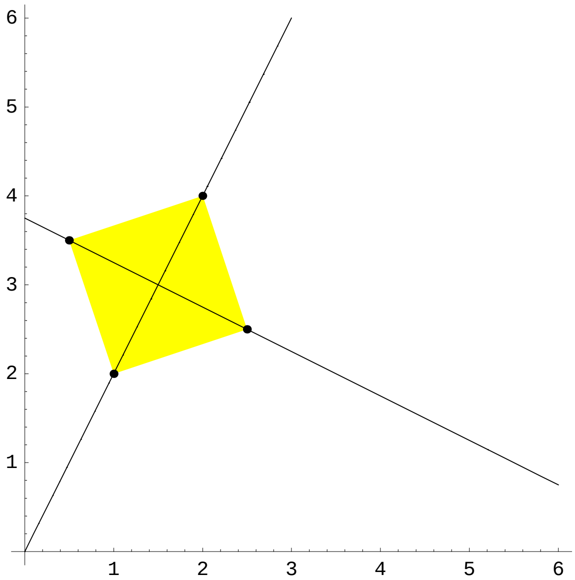
Notiamo infine che, essendo

```
diagonaleBD = distanza2Punti[puntoB, puntoD]
```

$$\sqrt{5}$$

le due diagonali hanno la medesima lunghezza per cui il rombo è in effetti un quadrato. Un grafico della situazione appena studiata risulta

```
Show[Graphics[{colore[giallo], Polygon /@ {{puntoA, puntoB, puntoC, puntoD}}}],
  Graphics[{PointSize[0.015], Point /@ {puntoA, puntoB, puntoC, puntoD}}],
  graficoRette[{rettaAC, asseAC}, {x, 0, 6}, {y, 0, 6}, DisplayFunction -> Identity],
  DisplayFunction → $DisplayFunction, AspectRatio → Automatic,  Axes → True];
```



3. Esercizi a carattere teorico

Esercizio 3.1

```
Clear["Global`*"];
```

▼ **Dimostrare la formula dell'area di un triangolo di dati vertici utilizzando le nozioni di retta per due punti e distanza di un punto da questa.**

Qui definiamo le coordinate dei tre vertici

```
pA = {xA, yA};
pB = {xB, yB};
pC = {xC, yC};
```

la retta passante per *pA* e *pB* è

```
rettaAB = retta2Punti[pA, pB]
```

$$(-xA + xB)\, y - xB\, yA + x\, (yA - yB) + xA\, yB == 0$$

mentre la base del triangolo misura

```
baseAB = distanza2Punti[pA, pB]
```

$$\sqrt{(-xA + xB)^2 + (-yA + yB)^2}$$

L'altezza rispetto alla base AB si ottiene determinando la distanza del terzo vertice C dalla retta AB

```
altezzaCH = distanzaPuntoRetta[pC, rettaAB]
```

$$\frac{\text{Abs}[-xB\, yA + xC\,(yA - yB) + xA\, yB + (-xA + xB)\, yC]}{\sqrt{(-xA + xB)^2 + (yA - yB)^2}}$$

L'area del triangolo ABC è quindi

```
areaABC = 1/2 baseAB altezzaCH // Simplify
```

$$\frac{1}{2}\,\text{Abs}[xB\, yA - xC\, yA - xA\, yB + xC\, yB + xA\, yC - xB\, yC]$$

Confrontiamo questo risultato con l'espressione discussa nella parte teorica e che fornisce direttamente l'area del triangolo dati i vertici

```
areaTriangolo[pA, pB, pC] == areaABC // Simplify
```

```
True
```

Le due espressioni coincidono.

Esercizio 3.2

```
Clear["Global`*"]
```

▼ Determinare le coordinate del baricentro note quelle dei vertici di un triangolo.

Definiti i vertici del triangolo ABC

```
pA = {xA, yA};
pB = {xB, yB};
pC = {xC, yC};
```

determiniamo il baricentro come il punto di intersezione di due mediane. Determiniamo quindi l'equazione delle mediane AM e BN individuando innanzitutto i punti medi di BC e AC

```
{pMedioBC = puntoMedio[pB, pC],
 pMedioAC = puntoMedio[pA, pC]}
```

$$\left\{\left\{\frac{xB + xC}{2}, \frac{yB + yC}{2}\right\}, \left\{\frac{xA + xC}{2}, \frac{yA + yC}{2}\right\}\right\}$$

Le mediane sono ora

```
medianaAM = retta2Punti[pA, pMedioBC]
```

$$\left(-xA + \frac{xB + xC}{2}\right) y - \frac{1}{2}(xB + xC)\, yA + x\left(yA + \frac{1}{2}(-yB - yC)\right) + \frac{1}{2}\, xA\,(yB + yC) == 0$$

```
medianaBN = retta2Punti[pB, pMedioAC]
```

$$\left(-xB+\frac{xA+xC}{2}\right)y-\frac{1}{2}(xA+xC)\,yB+x\left(yB+\frac{1}{2}(-yA-yC)\right)+\frac{1}{2}xB\,(yA+yC)==0$$

Intersecandole abbiamo le coordinate del baricentro

```
sol = Solve[{medianaAM, medianaBN}, {x, y}] // Simplify
```

$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{3}(xA+xB+xC),\ y\to\frac{1}{3}(yA+yB+yC)\right\}\right\}$$

cioè

```
baricentro = {x, y} /. Flatten[sol]
```

$$\left\{\frac{1}{3}(xA+xB+xC),\ \frac{1}{3}(yA+yB+yC)\right\}$$

Esercizio 3.3

```
Clear["Global`*"];
```

▼ **Determinare le coordinate del punto $P_1(x_1, y_1)$ simmetrico di $P(x, y)$ rispetto alla retta di equazione $r: a\,x+b\,y+c=0$.**

Definiamo i punti P e P_1 e la retta r

```
puntoP = {x, y};
puntoP1 = {x1, y1};
r = a x + b y + c == 0;
```

Il punto medio M del segmento PP_1

```
puntoM = puntoMedio[puntoP, puntoP1]
```

$$\left\{\frac{x+x1}{2},\ \frac{y+y1}{2}\right\}$$

appartiene alla retta r per cui una prima condizione risulta

```
eq1 = appartenenzaPuntoRetta[puntoM, r]
```

$$c+\frac{1}{2}a\,(x+x1)+\frac{1}{2}b\,(y+y1)==0$$

La seconda condizione si ottiene imponendo che il coefficiente angolare della retta PP_1 sia opposto e reciproco di quello di r, cosicché

```
eq2 = coefficienteAngolare[puntoP, puntoP1] == -1 / coefficienteAngolare[r]
```

$$\frac{-y + y1}{-x + x1} == \frac{b}{a}$$

Risolvendo il sistema di queste due equazioni nelle incognite x_1, y_1

```
sol = Solve[{eq1, eq2}, {x1, y1}]
```

$$\left\{\left\{x1 \to -\frac{2\,a\,c + a^2\,x - b^2\,x + 2\,a\,b\,y}{a^2 + b^2},\ y1 \to -\frac{2\,b\,c + 2\,a\,b\,x - a^2\,y + b^2\,y}{a^2 + b^2}\right\}\right\}$$

si ottengono le coordinate del punto immagine $P_1(x_1, y_1)$ nella simmetria assiale di asse r.

```
puntoP1 = Flatten[puntoP1 /. sol]
```

$$\left\{\frac{-a^2\,x + b^2\,x - 2\,a\,(c + b\,y)}{a^2 + b^2},\ \frac{-2\,b\,(c + a\,x) + a^2\,y - b^2\,y}{a^2 + b^2}\right\}$$

Le espressioni ottenute per le coordinate di P_1 assumono forme più semplici se consideriamo le principali simmetrie assiali: tra queste abbiamo quelle con asse

- parallelo all'asse delle ascisse ossia con equazione $r: y = k$. In tal caso basta sostituire $a = 0$, $b = 1$, $c = -k$ nella precedente per ottenere

```
puntoP1 /. {a → 0, b → 1, c → -k}
```

$$\{x,\ 2\,k - y\}$$

- parallelo all'asse delle ordinate ossia con equazione $r: x = k$. In tal caso si deve sostituire $a = 1$, $b = 0$, $c = -k$

```
puntoP1 /. {a → 1, b → 0, c → -k}
```

$$\{2\,k - x,\ y\}$$

- coincidente con la bisettrice $r: y = x$ cosicché $a = 1$, $b = -1$, $c = 0$

```
puntoP1 /. {a → 1, b → -1, c → 0}
```

$$\{y,\ x\}$$

- oppure coincidente con la bisettrice del secondo e quarto quadrante $r: y = -x$ dove $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$

```
puntoP1 /. {a → 1, b → 1, c → 0}
```

$$\{-y,\ -x\}$$

4. Esercizi sui fasci di rette

Esercizio 4.1

```
Clear["Global`*"];
```

▼ **Determinare le rette del fascio $f:(2+k)\,x+(k-1)\,y-5-k=0$ che individuano con entrambi gli assi cartesiani dei triangoli di area $\frac{1}{2}$.**

Studiamo le caratteristiche del fascio:

```
f = -5 - k + (2 + k) x + (-1 + k) y == 0
```

```
-5 - k + (2 + k) x + (-1 + k) y == 0
```

escluso che sia un fascio di rette improprio in quanto il coefficiente angolare

```
coefficienteAngolare[f]
```

$$\frac{2+k}{1-k}$$

dipende dal parametro, individuiamo generatrici e centro

```
equazioneEsplicita /@ generatriciFascio[f, k]
```

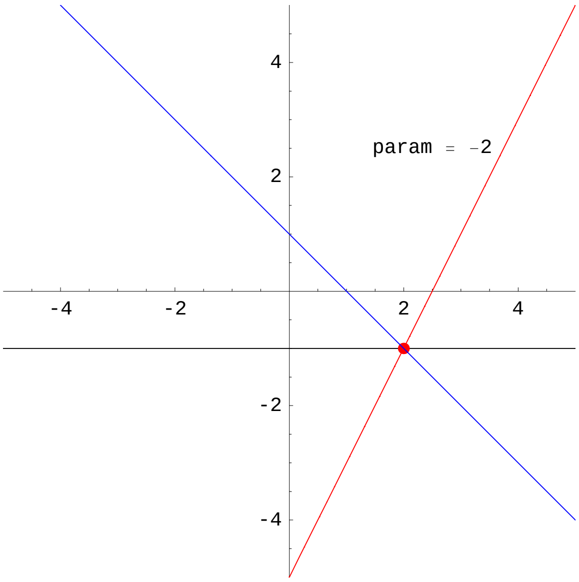
```
{y == -5 + 2 x, y == 1 - x}
```

```
pC = centroFascio[f, k]
```

```
{2, -1}
```

Il fascio è proprio con centro in $(2, -1)$ e generatrici $y = 2\,x - 5$ e $y = -x + 1$. Il grafico di alcune sue rette è

```
graficoFascioGeneratrici[f, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {k, -2, 2}];
```



Il punto di intersezione con l'asse delle x, pA, risulta

```
pA = puntoIntersezione[f, y == 0]
```

$$\left\{-\frac{-5-k}{2+k},\ 0\right\}$$

e con l'asse delle y, pB

```
pB = puntoIntersezione[f, x == 0]
```

$$\left\{0,\ -\frac{-5-k}{-1+k}\right\}$$

L'area del triangolo formato dai punti A, B e $O(0, 0)$ è pertanto

```
areaTriangolo[pA, pB, {0, 0}] // Simplify
```

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Abs}\left[\frac{(5+k)^2}{-2+k+k^2}\right]$$

e posta uguale ad $\frac{1}{2}$, fornisce un'equazione nell'incognita k che si risolve

```
equazione = areaTriangolo[pA, pB, {0, 0}] == 1/2
```

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{Abs}\left[\frac{(-5-k)^2}{(-1+k)\,(2+k)}\right] == \frac{1}{2}$$

```
sol = Solve[equazione, k]
```

$$\{\{k \to -3\}\}$$

L'unica soluzione trovata risulta $k = -3$ e la retta corrispondente è

```
equazioneEsplicita[f /. Flatten[sol]]
```

$$y == -\frac{1}{2} - \frac{x}{4}$$

Esercizio 4.2

```
Clear["Global`*"];
```

▼ Individuata la retta comune ai due fasci rappresentati dalle equazioni $f_1 : 3\,(k-1)\,x + 4\,(1-k)\,y - 8\,k = 0$ e $f_2 : (1+h)\,x + 2\,h\,y - 1 + 3\,h = 0$, si calcoli l'area del triangolo che tale retta delimita con gli assi cartesiani.

Dopo aver definito i due fasci

```
f1 = 3 (k - 1) x + 4 (1 - k) y - 8 k == 0;
f2 = (1 + h) x + 2 h y - 1 + 3 h == 0;
```

studiamone le caratteristiche scrivendo il primo nella forma esplicita

```
equazioneEsplicita[f1]
```

$$y == -\frac{2\,k}{-1+k} + \frac{3\,x}{4}$$

Appare allora che il coefficiente angolare di *f1* è indipendente dal parametro k per cui tale fascio risulta costituito da rette parallele (mentre per $k = -1$, valore escluso dalla forma esplicita non si ottiene alcuna retta). Per il secondo, esclusa questa eventualità in quanto

```
equazioneEsplicita[f2]
```

$$y == -\frac{-1+3\,h}{2\,h} - \frac{(1+h)\,x}{2\,h}$$

il coefficiente angolare dipende dal parametro h (ancora $h \neq 0$), determiniamo le generatrici e il centro

```
generatriciFascio[f2, h]
```

$\{-1 + x == 0,\ 3 + x + 2\,y == 0\}$

```
centrof2 = centroFascio[f2, h]
```

$\{1, -2\}$

La retta comune richiesta non potrà che essere quella di *f2* avente il coefficiente angolare pari a quello comune di *f1* per cui dovremo risolvere l'equazione

```
param2 = Flatten[Solve[coefficienteAngolare[f2] == coefficienteAngolare[f1], h]]
```

$$\left\{h \to -\frac{2}{5}\right\}$$

nell'incognita h. Per il primo fascio, la retta cercata dovrà passare invece per il centro del secondo. Imponiamo pertanto l'appartenenza del punto `centrof2` al primo fascio e risolviamo l'equazione nell'incognita k

```
equaz = appartenenzaPuntoRetta[centrof2, f1]
```

```
-8 (1 - k) + 3 (-1 + k) - 8 k == 0
```

```
param1 = Flatten[Solve[equaz, k]]
```

$\left\{k \to \frac{11}{3}\right\}$

In corrispondenza di questi due valori si ottiene in effetti

```
retta1 = f1 /. param1 // Simplify
```

```
3 x == 11 + 4 y
```

e per il secondo fascio

```
retta2 = f2 /. param2 // Simplify
```

```
3 x == 11 + 4 y
```

che, come aspettato, risulta essere la medesima retta. Per determinare l'area del triangolo che quest'ultima fa con gli assi coordinati determiniamone i punti di intersezione

```
puntoA = puntoIntersezione[retta1, y == 0]
```

$\left\{\frac{11}{3}, 0\right\}$

```
puntoB = puntoIntersezione[retta1, x == 0]
```

$\left\{0, -\frac{11}{4}\right\}$

per cui l'area risulta

```
areaTriangolo[{0, 0}, puntoA, puntoB]
```

$\frac{121}{24}$

Esercizio 4.3

```
Clear["Global`*"]
```

▼ **Dopo aver individuato le caratteristiche del fascio f di rette di equazione $(1+k)\,x+(2\,k-4)\,y-6\,k=0$, determinare per quali valori di k le rette intersecano il segmento di estremi $P(0,\,1)$ e $Q(4,\,3)$.**

Ad una prima analisi, il fascio

```
f = (1 + k) x + (2 k - 4) y - 6 k == 0
```

```
-6 k + (1 + k) x + (-4 + 2 k) y == 0
```

appare avere il coefficiente angolare dipendente dal parametro

```
coefficienteAngolare[f]
```

$$\frac{1+k}{4-2\,k}$$

per cui, non essendo improprio, cerchiamone le rette sostegno e l'eventuale centro. Le prime sono

```
{g1, g2} = generatriciFascio[f, k]
```

```
{x - 4 y == 0, -6 + x + 2 y == 0}
```

e tra queste, la seconda *g2* non appartiene al fascio mentre la prima si ottiene per $k=0$: difatti la fattorizzazione del parametro implica l'equazione

```
Collect[First[f], k] == 0
```

```
x - 4 y + k (-6 + x + 2 y) == 0
```

che mostra come per $k\to\infty$ le rette possano solo tendere alla *g2*. Il centro di f risulta

```
puntoC = centroFascio[f, k]
```

```
{4, 1}
```

Definiti i punti $P(0,\,1)$ e $Q(4,\,3)$

```
{puntoP = {0, 1},
 puntoQ = {4, 3}}
```

```
{{0, 1}, {4, 3}}
```

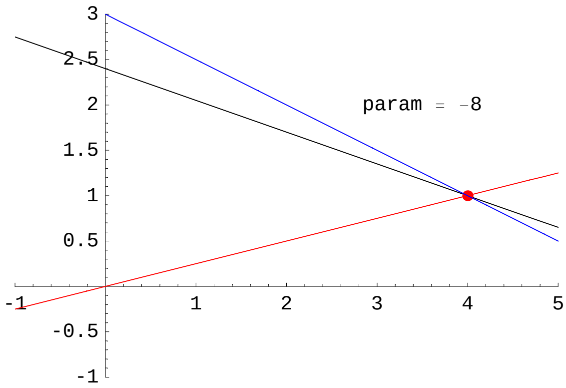
e determinata la retta *PQ*

```
rettaPQ = retta2Punti[puntoP, puntoQ]
```

```
-4 - 2 x + 4 y == 0
```

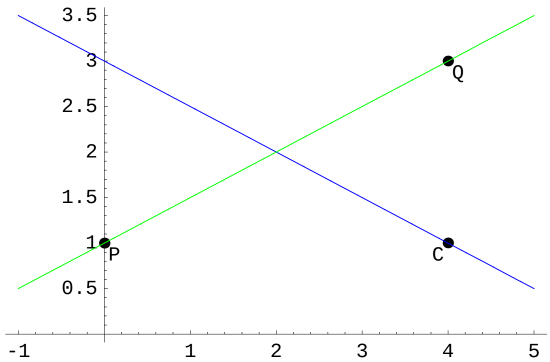
l'animazione del fascio

```
graficoFascioGeneratrici[f, {x, -1, 5}, {y, -1, 3}, {k, -10, 10}];
```



conferma come all'aumentare di k in valore assoluto (si provi a far variare k in intervalli di valori elevati) , le rette si avvicinino a $g2$. Poiché la generatrice $g2$ interseca la retta PQ, i valori del parametro k aspettati dovranno quindi assumere valori molto grandi in valore assoluto (figura successiva).

```
Show[Graphics[{Text["P", puntoP, {-1, 1}], Text["Q", puntoQ, {-1, 1}], Text["C", puntoC, {1, 1}]}],
  Graphics[{PointSize[0.02], Point[puntoP], Point[puntoQ], Point[puntoC]}],
  graficoRette[{g2, rettaPQ}, {x, -1, 5}, {y, -1, 5},
   PlotStyle → {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[0, 1, 0]}, DisplayFunction → Identity], Axes → True];
```



Per deteminare l'insieme di variabilità di k procediamo algebricamente per cui si dovrà risolvere il sistema tra f e la retta PQ imponendo che le ascisse dei punti di intersezione appartengano all'intervallo $[0, 4]$ definito dalle ascisse di P e Q. Le coordinate del punto di intersezione si ottengono con

```
{ascissa, ordinata} = puntoIntersezione[f, rettaPQ]
```

$$\left\{\frac{4\,(1+k)}{-1+2\,k},\ -\frac{-1-4\,k}{-1+2\,k}\right\}$$

Le soluzioni si ottengono facilmente con l'istruzione

```
Reduce[0 ≤ ascissa ≤ 4, k]
```

$k \leq -1 \ ||\ k \geq 2$

Come aspettato vengono coinvolti valori del parametro appartenenti ad intervalli illimitati sia con valori positivi che negativi.

Esercizio 4.4

```
Clear["Global`*"]
```

▼ **Nel fascio di rette di centro $C(5, 3)$ determinare la retta r perpendicolare alla retta di equazione $4x - 3y - 1 = 0$ e la retta s che, con l'origine, intercetta sul semiasse x positivo un segmento di lunghezza 2. Calcolare infine l'equazione della retta t parallela all'asse $y$che delimita con le rette r e s un triangolo di area $\frac{63}{2}$.**

Definito il punto $C(5, 3)$

```
puntoC = {5, 3}
```

```
{5, 3}
```

costruiamo il fascio proprio di centro C

```
f = y - 3 == m (x - 5)
```

```
-3 + y == m (-5 + x)
```

Poiché la retta r

```
rettaData = 4 x - 3 y - 1 == 0
```

```
-1 + 4 x - 3 y == 0
```

possiede coefficiente angolare

```
mData = coefficienteAngolare[rettaData]
```

$$\frac{4}{3}$$

la retta r si ottiene dal fascio f sostituendovi l'opposto del reciproco

```
r = f /. (m → -1 / mData)
```

$$-3 + y == -\frac{3}{4}(-5 + x)$$

In forma esplicita risulta

```
r = equazioneEsplicita[r]
```

$$y == \frac{27}{4} - \frac{3x}{4}$$

La retta s invece, si deduce imponendo il passaggio di f per il punto $(2, 0)$ in quanto deve intercettare sul semiasse positivo delle ascisse un segmento (con secondo estremo l'origine) di lunghezza 2

```
condizione = appartenenzaPuntoRetta[{2, 0}, f]
```

```
-3 == -3 m
```

da cui

```
ms = Flatten[Solve[condizione, m]]
```

```
{m → 1}
```

Sostituendo tale valore in f si ha

```
s = equazioneEsplicita[f /. ms]
```

```
y == -2 + x
```

Dobbiamo ora definire il fascio di rette parallele all'asse y

```
t = x == k
```

```
x == k
```

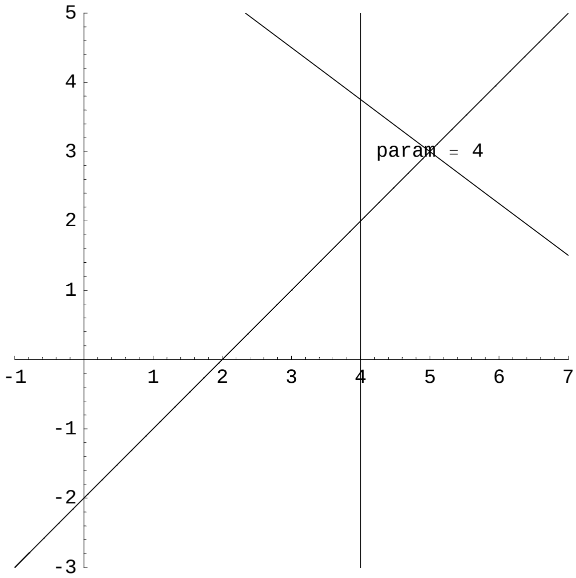
e i suoi punti di intersezione con r e s

```
{puntoA = puntoIntersezione[t, r],
 puntoB = puntoIntersezione[t, s]}
```

$$\left\{\left\{k, -\frac{3}{4}(-9+k)\right\}, \{k, -2+k\}\right\}$$

L'animazione seguente fornisce una rappresentazione della situazione geometrica

```
graficoAnimazioneFascio[{t, r, s}, {x, -1, 7}, {y, -3, 5}, {k, -1, 6}];
```



L'area di $\triangle ABC$ può essere determinata per mezzo della formula che la esprime in termini dei tre vertici oppure, come faremo in questo caso, individuando le lunghezze della base AB e della relativa altezza CH.

```
baseAB = distanza2Punti[puntoA, puntoB] // Simplify
```

$$\frac{7}{4}\sqrt{(-5+k)^2}$$

L'altezza relativa alla base AB è invece la differenza in valore assoluto delle ascisse di C e di un qualsiasi punto di t:

```
altezzaCH = Abs[5 - k]
```

```
Abs[5 - k]
```

di conseguenza risulta

```
areaABC = 1/2 baseAB altezzaCH
```

$$\frac{7}{8}\sqrt{(-5+k)^2}\ \mathrm{Abs}[5-k]$$

per cui, posta uguale al valore dato dal testo, risolviamo la conseguente equazione

```
sol = Solve[areaABC == 63/2, k]
```

```
{{k → -1}, {k → 11}}
```

In definitiva, le due equazioni corrispondenti per le rette t sono

```
x == k /. sol
```

```
{x == -1, x == 11}
```

Esercizio 4.5

```
Clear["Global`*"]
```

▼ **Studiate le caratteristiche dei due fasci**
$a: 5 - \frac{7k}{3} + \left(-1 + \frac{k}{3}\right)x + (-2 + k)\,y == 0$ e
$b: 8 - \frac{10k}{3} + \left(-4 - \frac{k}{3}\right)x + (4 - k)\,y == 0$,
determinare il luogo Γ dei loro punti di intersezione.

Le caratteristiche si studiano facilmente osservando dapprima i coefficienti angolari e, nel caso di dipendenza dal parametro, ricercando l'eventuale centro del fascio e le corrispondenti generatrici. Per determinare invece il luogo richiesto otterremo innanzitutto le coordinate del loro punto di intersezione in funzione del parametro k per poi interpretarle come una coppia di equazioni parametriche rappresentative del luogo Γ.

Definiamo quindi i due fasci

```
{a = 5 - 7k/3 + (-1 + k/3) x + (-2 + k) y == 0,
 b = 8 - 10k/3 + (-4 - k/3) x + (4 - k) y == 0}
```

$$\left\{5-\frac{7\,k}{3}+\left(-1+\frac{k}{3}\right)x+(-2+k)\,y==0,\ 8-\frac{10\,k}{3}+\left(-4-\frac{k}{3}\right)x+(4-k)\,y==0\right\}$$

Le caratteristiche discendono facilmente osservando innanzitutto i rispettivi coefficienti angolari

```
{coefficienteAngolare[a], coefficienteAngolare[b]}
```

$$\left\{\frac{3-k}{-6+3\,k},\ \frac{12+k}{12-3\,k}\right\}$$

e, poiché questi presentano una dipendenza (non eliminabile) dal parametro, possiamo escludere che i fasci proposti siano costituiti da rette parallele cioè impropri. Vediamo se possiedono un centro e delle generatrici

```
{centro1 = centroFascio[a, k],
 gener1 = generatriciFascio[a, k]}
```

$$\left\{\{1,\ 2\},\ \left\{5-x-2\,y==0,\ -\frac{7}{3}+\frac{x}{3}+y==0\right\}\right\}$$

```
{centro2 = centroFascio[b, k],
 gener2 = generatriciFascio[b, k]}
```

$$\left\{\{-1,\ -3\},\ \left\{8-4\,x+4\,y==0,\ -\frac{10}{3}-\frac{x}{3}-y==0\right\}\right\}$$

Sono pertanto fasci di rette propri. Il loro punto di intersezione P si ottiene

```
puntoP = puntoIntersezione[a, b]
```

$$\left\{3-k,\ -\frac{1}{3}\,(-3-k)\right\}$$

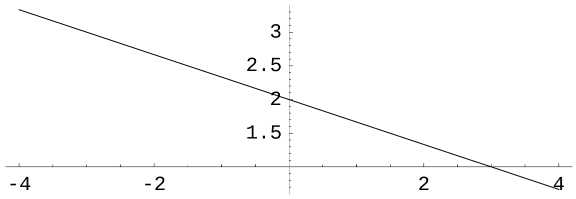
Al variare del parametro nell'insieme dei numeri reali, ciascuna delle coordinate di tale punto mostra una dipendenza lineare da k. Abbiamo cioè una rappresentazione parametrica dell'insieme Γ richiesto e, dato che appare descritto da relazioni lineari, Γ non potrà che essere una retta. Difatti esplicitato il legame tra ascissa e ordinata dei punti appartenenti a tale luogo

```
eqParam = Thread[Equal[{x, y}, puntoP]]
```

$$\left\{x==3-k,\ y==-\frac{1}{3}\,(-3-k)\right\}$$

abbiamo nient'altro che la tipica rappresentazione parametrica di una retta: il grafico di questo luogo assieme ai due fasci mostra con evidenza questi risultati

```
graficoRetteParametriche[{eqParam}, k, {x, -4, 4}, {y, -1, 4}];
```



Volendo riportarci alla forma implicita, cioè ad un'equazione che metta in relazione direttamente l'ascissa e l'ordinata dei punti di Γ, va eliminata la dipendenza dal parametro dalla coppia di equazioni ottenute sopra. Ciò si ottiene esplicitando il parametro da una equazione

```
param = Flatten[Solve[eqParam[[1]], k]]
```

$\{k \to 3 - x\}$

e quindi sostituendolo nell'altra

```
luogoGamma = eqParam[[2]] /. param
```

$y == \frac{6 - x}{3}$

Passando alla rappresentazione esplicita abbiamo

```
luogoGamma = equazioneEsplicita[luogoGamma]
```

$y == 2 - \frac{x}{3}$

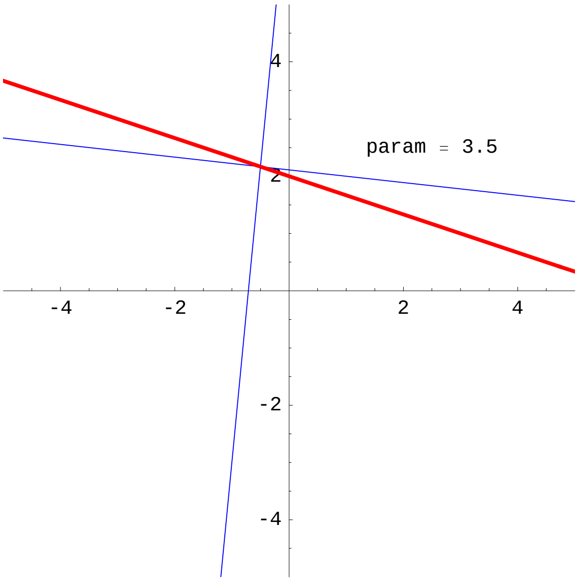
Tutto ciò può eseguirsi anche in un unico passaggio con l'istruzione

```
luogoGamma = equazioneEsplicita[riduceParametrica[eqParam, k]]
```

$y == 2 - \frac{x}{3}$

Proponiamo infine un'animazione grafica che riassuma visivamente quanto trovato: appare allora evidente come, al variare del parametro k, il punto di intesezione dei due fasci appartenga alla retta (in rosso) trovata.

```
graficoAnimazioneFascio[{a, b, luogoGamma}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {k, -2, 8, .5},
  PlotStyle -> {colore[blu], colore[blu], {colore[rosso], Thickness[0.007]}}];
```



Esercizio 4.6

```
Clear["Global`*"];
```

▼ **Sono assegnati i fasci $\alpha : (y+3)(k+2) = (3k+1)(x+1)$, $\beta : (y+3)(3k+1) = -(k+2)(x+1)$. Studiate le caratteristiche di ciascuno e i legami reciproci, siano A e B le intersezioni, rispettivamente, di α e β con l'asse delle ascisse. Determinare k in modo che valga la relazione $\frac{1}{15}\,A\,(ACB) = 3$, con C centro comune di α e β.**

Definiamo i due fasci

```
α = (y + 3) (k + 2) == (3 k + 1) (x + 1);
β = (y + 3) (3 k + 1) == - (k + 2) (x + 1);
```

e studiamone le caratteristiche

```
centroFascio[α, k]
```

```
{-1, -3}
```

```
centroC = centroFascio[β, k]
```

```
{-1, -3}
```

Come detto dal testo, hanno pertanto il medesimo centro $C(-1, -3)$. Inoltre esplicitando i coefficienti angolari di ciascuno

```
{coefficienteAngolare[α],
 coefficienteAngolare[β]}
```

$$\left\{\frac{1+3\,k}{2+k},\ \frac{2+k}{-1-3\,k}\right\}$$

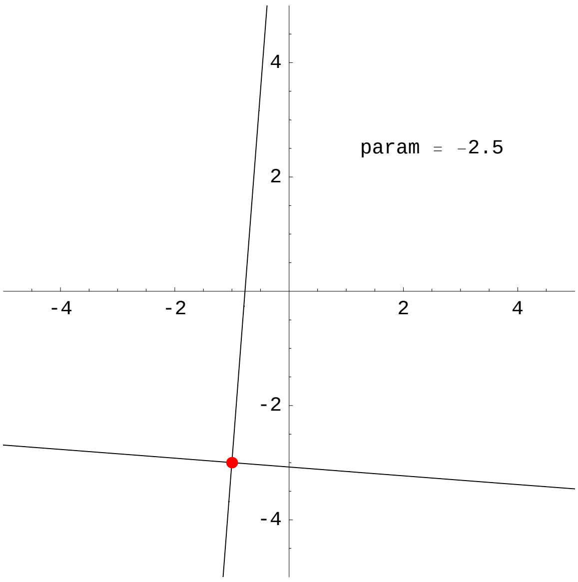
si può osservare che sono tali che, per $k \neq -2$ e $k \neq -\frac{1}{3}$, il loro prodotto risulta essere

```
coefficienteAngolare[α] coefficienteAngolare[β] // Simplify
```

$$-1$$

per cui ad ogni retta di un fascio corrisponde nell'altro una retta perpendicolare. L'animazione seguente mostra tali caratteristiche.

```
graficoAnimazioneFascio[{α, β}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {k, -3, 3, 0.5}, centroC];
```



Determiniamo le coordinate dei punti pA e pB, rispettivamente intersezioni di α e β con l'asse delle ascisse.

```
pA = puntoIntersezione[α, y == 0]
```

$$\left\{\frac{5}{1+3\,k},\ 0\right\}$$

```
pB = puntoIntersezione[β, y == 0]
```

$$\left\{-\frac{5\,(1+2\,k)}{2+k},\ 0\right\}$$

Il calcolo dell'area mostra ora come questa sia una funzione del parametro k

```
areaABC = areaTriangolo[pA, pB, centroC] // Simplify
```

$$\frac{45}{2}\,\mathrm{Abs}\left[\frac{1+2\,k+2\,k^2}{2+7\,k+3\,k^2}\right]$$

Imponendo la condizione data dal problema

```
equazione = 1/15 areaABC == 3
```

$$\frac{3}{2}\,\mathrm{Abs}\left[\frac{1+2k+2k^2}{2+7k+3k^2}\right] == 3$$

e risolvendo in k otteniamo

```
valoriParam = Solve[equazione, k]
```

$$\left\{\left\{k\to\frac{1}{4}\left(-4-\sqrt{6}\right)\right\},\ \left\{k\to\frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{6}\right)\right\},\ \left\{k\to\frac{1}{4}\left(-4+\sqrt{6}\right)\right\},\ \left\{k\to\frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{6}\right)\right\}\right\}$$

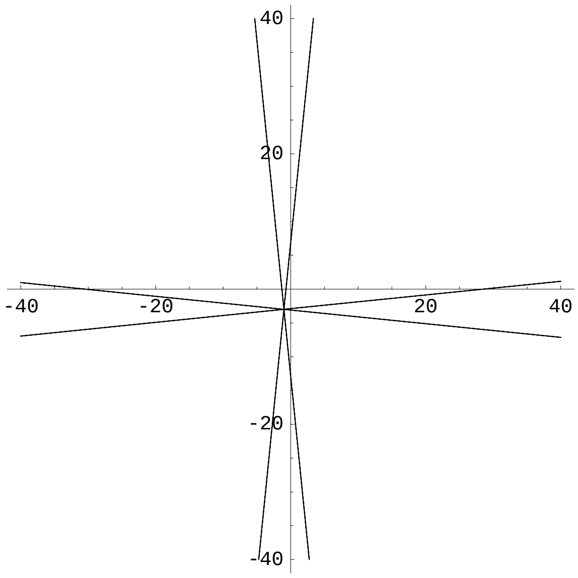
quattro valori tutti accettabili. Pur non richiesto dal problema, in corrispondenza di questi si hanno le rette

```
rette = Flatten[{α, β} /. valoriParam // Simplify]
```

$$\Big\{20+\left(8+3\sqrt{6}\right)x == \left(-4+\sqrt{6}\right)y,\ -\frac{1}{4}\left(8+3\sqrt{6}\right)(3+y) == \frac{1}{4}\left(-4+\sqrt{6}\right)(1+x),$$
$$10+7x+3\sqrt{6}\,x+y == \sqrt{6}\,y,\ 10\left(2+\sqrt{6}\right)+\sqrt{6}\,x+\left(7+3\sqrt{6}\right)y == x,$$
$$\left(-8+3\sqrt{6}\right)x == 20+\left(4+\sqrt{6}\right)y,\ \frac{1}{4}\left(-8+3\sqrt{6}\right)(3+y) == -\frac{1}{4}\left(4+\sqrt{6}\right)(1+x),$$
$$3\sqrt{6}\,x == 10+7x+y+\sqrt{6}\,y,\ \left(1+\sqrt{6}\right)x+\sqrt{6}\,(10+3y) == 20+7y\Big\}$$

il cui grafico è il seguente.

```
graficoRette[rette, {x, -40, 40}, {y, -40, 40}];
```



Questo mostra solo 4 rette. In effetti, va notato che i quattro valori del parametro danno origine a otto rette ma di queste solo quattro sono distinte. Le rimanenti possiedono i coefficienti angolari scambiati: il calcolo di questi ultimi rende evidente questo fatto.

```
{coefficienteAngolare[α], coefficienteAngolare[β]} /. valoriParam // N
```

```
{{-9.89898, 0.101021}, {9.89898, -0.101021}, {-0.101021, 9.89898}, {0.101021, -9.89898}}
```

Si osserva lo stesso fatto mappando la funzione **`equazioneEsplicita`** e riportando la lista delle rette in forma numerica e tabellare

```
equazioneEsplicita /@ rette // N // TableForm
```

```
y == -12.899 - 9.89898 x
y == -2.89898 + 0.101021 x
y == 6.89898 + 9.89898 x
y == -3.10102 - 0.101021 x
y == -3.10102 - 0.101021 x
y == 6.89898 + 9.89898 x
y == -2.89898 + 0.101021 x
y == -12.899 - 9.89898 x
```

Esercizio 4.7

```
Clear["Global`*"]
```

▼ **Nel piano xOy sono dati i punti $A(5, 1)$ e $B(1, -3)$ e la retta $r: y = 3x + 10$.**
a) Determinare su r il punto C equidistante da A e B;
b) determinare l'equazione della retta t parallela alla retta AB che intersechi i lati AC e BC del triangolo ABC rispettivamente in D e E e abbia da AB distanza uguale ai $\frac{2}{5}$ dell'altezza CM del triangolo;
c) determinare il centro della circonferenza circoscritta al trapezio $ABDE$.

a) Definiti i punti A e B e la retta r

```
{puntoA = {5, 1}, puntoB = {1, -3},
 r = y == 3 x + 10}
```

```
{{5, 1}, {1, -3}, y == 10 + 3 x}
```

il punto incognito $C(x_0, y_0)$ deve appartenere ad r e all'asse del segmento AB. Troviamo quindi questa retta individuando prima il punto medio M di AB

```
puntoM = puntoMedio[puntoA, puntoB]
```

```
{3, -1}
```

e quindi la retta AB

```
rettaAB = retta2Punti[puntoA, puntoB]
```

```
-16 + 4 x - 4 y == 0
```

L'asse si ottiene come

```
rettaCM = rettaPerpendicolare[puntoM, rettaAB] // Simplify
```

```
x + y == 2
```

Intersecando la retta data r e la retta CM e risolvendo il sistema delle due equazioni otteniamo il punto cercato

```
puntoC = puntoIntersezione[r, rettaCM]
```

```
{-2, 4}
```

La retta CM si sarebbe potuta determinare anche senza trovare l'equazione della retta AB ma solo con il coefficiente angolare di quest'ultima: i passaggi alternativi sono i seguenti

```
mAB = coefficienteAngolare[puntoA, puntoB]
```

```
1
```

```
rettaCM = rettaPerpendicolare[puntoM, mAB]
```

```
-2 + x + y == 0
```

b) Riportando la retta AB nella forma esplicita

```
rettaAB = equazioneEsplicita[rettaAB]
```

```
y == -4 + x
```

costruiamo il fascio f di rette parallele a questa

```
f = y == x + k
```

```
y == k + x
```

Calcolata la distanza di C dalla retta AB

```
distCM = distanzaPuntoRetta[puntoC, rettaAB]
```

$$5\sqrt{2}$$

imponiamo che le rette di f abbiano distanza da A pari ai $\frac{2}{5}CM$

$$\texttt{eq1} = \frac{2}{5}\,\texttt{distCM} == \texttt{distanzaPuntoRetta[puntoA, f]}$$

$$2\sqrt{2} == \frac{\mathrm{Abs}[-4-k]}{\sqrt{2}}$$

e quindi risolviamo l'equazione nell'incognita k

```
Solve[eq1, k]
```

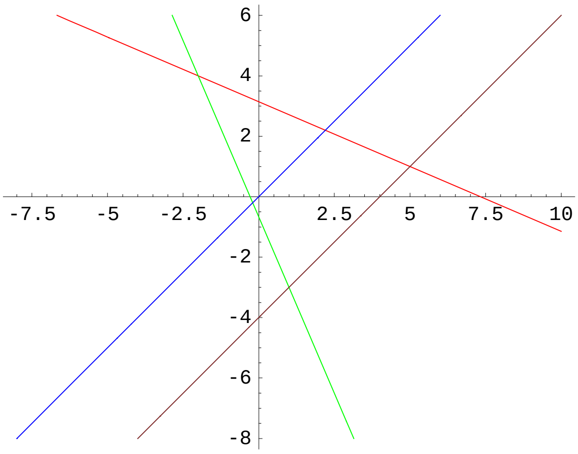
$$\{\{k \to -8\}, \{k \to 0\}\}$$

Una figura rappresentativa della situazione geometrica aiuta a comprendere come, tra questi valori, solo il secondo sia accettabile in quanto l'altro fornisce una retta che non interseca i lati del triangolo ABC. Difatti quest'ultima appartiene al semipiano inferiore nel quale AB suddivide il piano cartesiano: nel grafico, assieme alle rette AC e BC tracciamo pure la retta $y = x$ appena trovata.

```
{rettaDE = y == x,
 rettaAC = retta2Punti[puntoC, puntoA], rettaBC = retta2Punti[puntoB, puntoC]}
```

```
{y == x, -22 + 3 x + 7 y == 0, -2 - 7 x - 3 y == 0}
```

```
graficoRette[{rettaAC, rettaBC, rettaAB, rettaDE}, {x, -8, 10}, {y, -8, 6},
  PlotStyle → colore /@ {rosso, verde, marrone, blu}, AspectRatio → Automatic];
```



c) Il centro della circonferenza circoscritta al trapezio $ABDE$ appartiene all'asse del segmento AB cioè alla retta CM (si veda la figura sottostante) e contemporaneamente all'asse del segmento AD. Per trovare quest'ultimo procediamo calcolando le coordinate del punto D, intersezione della retta per A e C con la retta DE

```
puntoD = puntoIntersezione[rettaAC, rettaDE]
```

$$\left\{\frac{11}{5}, \frac{11}{5}\right\}$$

Il punto medio del segmento AD risulta

```
puntoMedioAD = puntoMedio[puntoA, puntoD]
```

$$\left\{\frac{18}{5}, \frac{8}{5}\right\}$$

e l'equazione dell'asse invece

```
asseAD = rettaPerpendicolare[puntoMedioAD, rettaAC]
```

$$-\frac{102}{5} + 7\,x - 3\,y == 0$$

Le coordinate del centro si possono infine calcolare come le soluzioni del sistema $CM \cap asseAD$

```
centroCC = puntoIntersezione[rettaCM, asseAD]
```

$$\left\{\frac{66}{25}, -\frac{16}{25}\right\}$$

Seguono le istruzioni per ottenere la rappresentazione grafica del problema discusso.

```
Show[Graphics[{{PointSize[0.02], Point /@ {puntoMedioAD, centroCC}},
    Text["A", puntoA, {0, 1}], Text["B", puntoB, {1, 0}], Text["D", puntoD, {0, -1}],
    Text["C", puntoC, {-1, -1}], Text["M", puntoM, {0, 1}]}],
  graficoRette[{rettaAC, rettaBC, rettaAB, rettaDE, rettaCM, asseAD}, {x, -4, 8}, {y, -6, 6},
   PlotStyle → colore /@ {rosso,  verde, marrone, blu, oro, violetto}, DisplayFunction → Identity],
  DisplayFunction -> $DisplayFunction, Axes → True, AspectRatio → Automatic];
```