Teoria: la retta e i fasci di rette

Lorenzo Roi

Istruzioni

Questa seconda parte richiama alcune definizioni incontrate nella precedente lezione e ne approfondisce il significato sia algebrico che geometrico. Si discute perciò del

- coefficiente angolare e della sua variazione, delle
- condizioni di parallelismo e perpendicolarità e infine, dei
- fasci di rette, delle loro caratteristiche e classificazione.

Modificare il percorso relativo all'istruzione **SetDirectory** sostituendolo con quello effettivo contenente il pacchetto **RettaFasci.m** (ponendo attenzione alle maiuscole-minuscole e all'unità) e quindi avviare il calcolo delle tre celle successive cliccando sul pulsante sottostante.

```
Cliccare qui per caricare il pacchetto.
```

```
SetDirectory["C:/Documents and Settings/Lorenzo/Documenti/Retta"];
```

```
Needs["Miscellaneous`RealOnly`"]
<< RettaFasci.m
```

I successivi due comandi eliminano gli avvisi riguardante la definizione e l'uso di termini con uno spelling simile.

```
Off[General::spell];
Off[General::spell1];
```

Richiamo di alcune definizioni

Nella lezione sulle rappresentazioni analitiche della retta abbiamo introdotto la definizione di coefficiente angolare. Se, della retta r, sono dati due suoi punti di coordinate $(x1, y1)$ e $(x2, y2)$ il coefficiente angolare (nei testi, comunemente individuato dalla lettera m) risulta definito dal rapporto

$$m = \frac{y2 - y1}{x2 - x1}$$

```
coefficienteAngolare[{x1, y1}, {x2, y2}]
```

$$\frac{-y1 + y2}{-x1 + x2}$$

Se invece, si parte dalla rappresentazione implicita di r, $a\,x + b\,y + c = 0$ il coefficiente angolare è espresso dal rapporto

$$m = -\frac{a}{b}$$

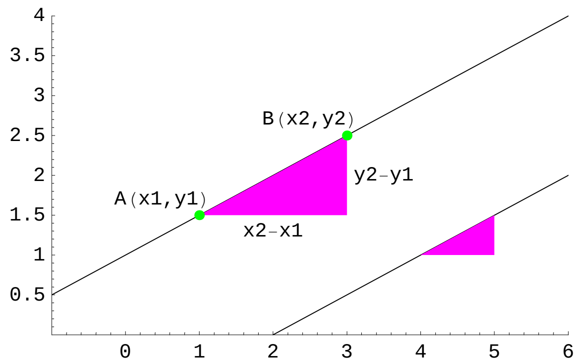
```
coefficienteAngolare[a x + b y + c == 0]
```

$-\frac{a}{b}$

In entrambi i casi si giunge a rappresentare la retta r nella forma esplicita $y = m\,x + q$ che, a seguito delle condizioni poste per definire m, $x2 - x1 \neq 0$ e $b \neq 0$, **può solo descrivere rette oblique e orizzontali**.

In questa lezione intendiamo chiarire il significato di coefficiente angolare e in particolare mostreremo come questo ci possa fornire informazioni sull'angolo che la retta r forma con il semiasse positivo delle ascisse. A tale scopo la figura seguente riporta il grafico di due rette ed evidenzia il significato geometrico dei termini $y2 - y1$ e $x2 - x1$ coinvolti nella definizione di m.

```
Show[Plot[{1 / 2 x + 1, 1 / 2 x - 1}, {x, -1, 6}, DisplayFunction → Identity],
  Graphics[{{colore[magenta], Polygon[{{1, 3 / 2}, {3, 5 / 2}, {3, 3 / 2}}]},
    {colore[magenta], Polygon[{{4, 1}, {5, 1.5}, {5, 1}}]}}],
  Graphics[{AbsolutePointSize[5], colore[verde], Point[{1, 3 / 2}], Point[{3, 5 / 2}]}],
  Graphics[{Text["A(x1,y1)", {0.5, 1.7}], Text["B(x2,y2)", {2.5, 2.7}],
    Text["x2-x1", {2, 1.3}], Text["y2-y1", {3.5, 2}]}],
  PlotRange → {{-1, 6}, {0, 4}}, DisplayFunction → $DisplayFunction, AxesOrigin → {-1, 0}];
```



In particolare, $y2 - y1$ rappresenta la differenza delle ordinate dei punti B e A e geometricamente esprime la misura della lunghezza (con segno) del cateto verticale del triangolo rettangolo evidenziato in colore. Il termine al denominatore $x2 - x1$ dà invece la misura (con segno) dell'altro cateto dello stesso triangolo. In termini di componenti del vettore $\boldsymbol{AB}$, $x2 - x1$ e $y2 - y1$ sono rispettivamente le componenti nelle direzioni definite dai versori $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{j}$ costituenti la base del sistema cartesiano. Siccome due punti qualsiasi appartenenti ad una retta parallela a quella per A e B, permettono di individuare un triangolo rettangolo simile a quello precedente, il rapporto tra i cateti di quest'ultimo risulta essere il medesimo (anche nel segno). Questo ci permette di intuire che due rette parallele dovranno avere il medesimo coefficiente angolare per cui, le osservazioni che faremo sulla variazione del coefficiente angolare basato su un particolare insieme di rette, si potranno estendere anche a tutte le rette parallele a questo insieme.

Variazione del coefficiente angolare

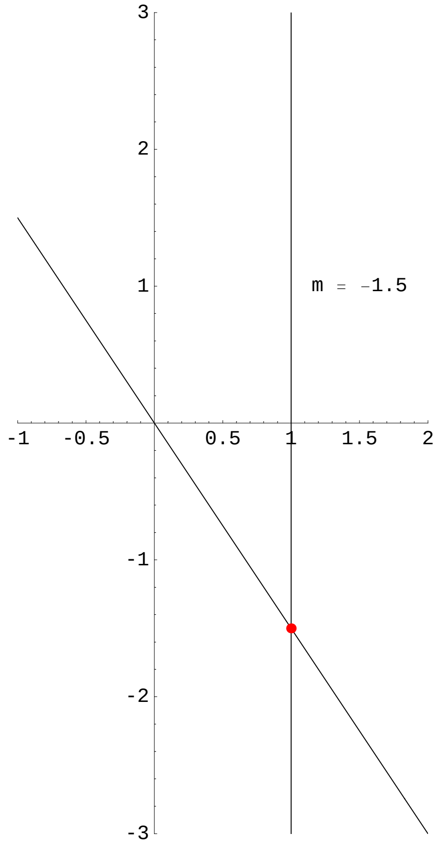
Consideriamo quindi la retta per l'origine di equazione esplicita $y = m\,x$ e la retta, parallela all'asse y di equazione $x = 1$. Il loro punto di intersezione è evidentemente caratterizzato dalle coordinate $P(1, m)$: abbiamo in tal modo stabilito una corrispondenza tra la retta di equazione $y = m\,x$ (di coefficiente angolare m) e l'ordinata di un suo punto. Le variazioni del coefficiente angolare corrispondono ora a quelle del punto P sulla retta verticale e pertanto dovrebbe essere più intuitivo seguirne la variazione. L'animazione che segue realizza ciò: al variare di m in un intervallo di valori (per esempio, tra -3 e 3), la retta con il corrispondente coefficiente angolare dapprima

- appartiene al quarto (e secondo) quadrante ($m < 0$) quindi,

- all'aumentare di m, si avvicina gradualmente all'asse delle ascisse fino a coincidere con esso quando $m = 0$.
- Per valori positivi di m, la retta interseca il primo e terzo quadrante e,
- in corrispondenza dell'aumento di m, aumenta gradualmente l'angolo che essa forma con l'asse x.

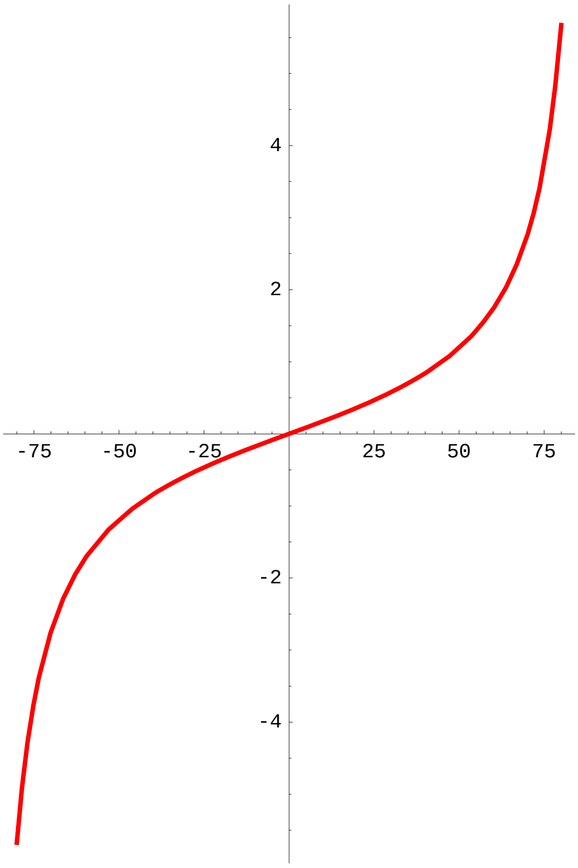
```
rettePerOrigine = y == m x;
```

```
Table[Show[Plot[Evaluate[Last[rettePerOrigine]], {x, -1, 3},
    AspectRatio → Automatic, DisplayFunction → Identity], Graphics[Line[{{1, -3}, {1, 3}}]],
   Graphics[{colore[rosso], AbsolutePointSize[5], Point[{1, m}]}],
   Graphics[Text[StringJoin["m = ", ToString[Chop[m]]], {1.5, 1}]],
   PlotRange → {{-1, 2}, {-3, 3}}, DisplayFunction → $DisplayFunction], {m, -3, 3, .5}];
```



Ad ogni valore di m possiamo quindi associare l'angolo che la retta r determina con il semiasse positivo delle x. Se conveniamo di rappresentare questi angoli con valori positivi quando, a partire dal semiasse positivo delle ascisse ci si deve muovere in verso antiorario per incontrare la retta r (che costituisce l'altro lato dell'angolo) e, viceversa, con valori negativi se ci si deve muovere in verso orario, risulta possibile definire una **corrispondenza biunivoca** tra le rette (o i rispettivi coefficienti angolari) e gli angoli (con il proprio segno positivo o negativo). Ne segue che esiste una qualche funzione (biunivoca) che fa corrispondere agli angoli così definiti il coefficiente angolare e viceversa. Di tale funzione forniamo per ora solo un grafico indicativo per angoli compresi nell'intervallo $[-80°, 80°]$ (figura 1).

```
Plot[Tan[x Degree], {x, -80, 80},
  AspectRatio → 1.5, PlotStyle → {colore[rosso], Thickness[0.008]}];
```



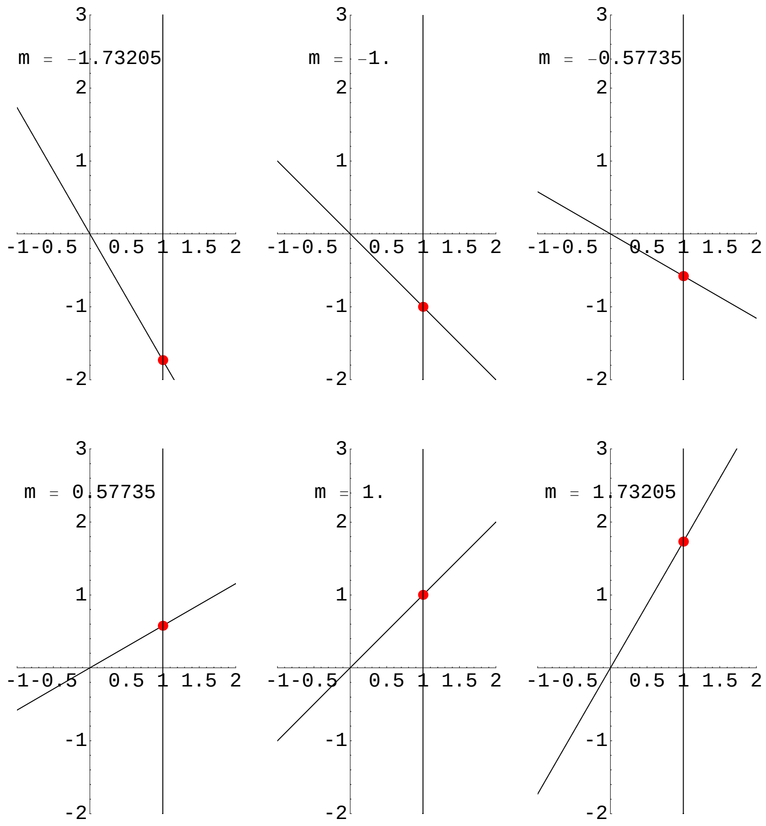
Ciò nonostante risulta possibile, già ora, associare ad alcuni angoli particolari, il corrispondente coefficiente angolare. Difatti, ricordando i rapporti esistenti tra cateti ed ipotenusa in triangoli rettangoli, a) con angoli di 30 °, 60 °, 90 ° oppure in triangoli rettangoli isosceli (quindi con angoli alla base di 45 °), possiamo compilare la seguente tabella

```
TableForm[{{-60, -√3, N[-√3]}, {-45, -1, -1}, {-30, -1/√3, N[-1/√3]}, {0, 0, 0},
  {30, 1/√3, N[1/√3]}, {45, 1, 1}, {60, √3, N[√3]}}, TableAlignments → Right,
  TableHeadings → {None, {"angolo (gradi)", "coefficiente angolare", "valore approx"}}]
```

angolo (gradi)	coefficiente angolare	valore approx
−60	$-\sqrt{3}$	−1.73205
−45	−1	−1
−30	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	−0.57735
0	0	0
30	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0.57735
45	1	1
60	$\sqrt{3}$	1.73205

In corrispondenza abbiamo le rette rappresentate in figura 2

```
Show[GraphicsArray[
  Partition[Map[Show[Plot[# x, {x, -1, 5}, PlotRange → {{-1, 2}, {-2, 3}}, AspectRatio → Automatic,
       DisplayFunction → Identity], Graphics[{colore[rosso], AbsolutePointSize[5],
        Point[{1, #}]}], Graphics[Text[StringJoin["m = ", ToString[N[#]]], {0, 2.4}]],
      Graphics[Line[{{1, -2}, {1, 4}}]]] &, {-√3, -1, -1/√3, 1/√3, 1, √3}], 3]],
  DisplayFunction → $DisplayFunction, ImageSize → 400];
```




```
Clear["Global`*"]
```

Condizione di parallelismo tra rette in forma implicita

Date due rette **nel piano**, sappiamo che si possono presentare tre eventualità circa la loro posizione reciproca: possono cioè essere rette incidenti per cui esiste un punto comune ad entrambe oppure possono essere coincidenti ed avere infiniti punti in comune. Infine se sono parallele e non coincidenti non esiste alcun punto del piano appartenente ad entrambe. Studiamo queste tre situazioni a livello algebrico partendo dalla rappresentazione implicita delle due rette. Abbiamo pertanto le rette *r1* e *r2*

$$r1: \; a1\,x + b1\,y + c1 = 0$$
$$r2: \; a2\,x + b2\,y + c2 = 0$$

```
r1 = a1 x + b1 y + c1 == 0;
r2 = a2 x + b2 y + c2 == 0;
```

e volendo individuare i possibili punti comuni cioè i punti dell'insieme $r1 \cap r2$ segue che questi dovranno costituire le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a1\,x + b1\,y + c1 = 0 \\ a2\,x + b2\,y + c2 = 0. \end{cases}$$

Questo appare essere un sistema di primo grado che sappiamo determinato cioè ammette una e una sola soluzione

```
puntoIntersezione[r1, r2]
```

$$\left\{-\frac{b2\,c1 - b1\,c2}{-a2\,b1 + a1\,b2}, -\frac{a2\,c1 - a1\,c2}{a2\,b1 - a1\,b2}\right\}$$

se risulta $a2\,b1 - a1\,b2 \neq 0$ cioè se non è nullo il determinante dei coefficienti (si riveda, per esempio, il metodo di Cramer). In tal caso l'unica coppia di valori rappresenta le coordinate dell'unico punto di intersezione.

Se invece risulta

$$a2\,b1 - a1\,b2 = 0$$

oppure in forma equivalente

$$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2},$$

detto k tale rapporto si possono presentare due eventualità. Se pure il rapporto $c1/c2$ è pari a k cioè

$$k = \frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} = \frac{c1}{c2}$$

allora il sistema presenta infinite soluzioni e le due rette coincidono. Difatti in tal caso varrebbero le

$$a1 = k\,a2, \quad b1 = k\,b2, \quad c1 = k\,c2$$

per cui l'equazione della prima retta si può riscrivere

$$r1 : a1\,x + b1\,y + c1 = 0 \to k\,a2\,x + k\,b2\,y + k\,c2 = 0 \to a2\,x + b2\,y + c2 = 0$$

coincidente manifestamente con quella di $r2$. Se invece

$$\frac{a1}{a2} = \frac{b1}{b2} \neq \frac{c1}{c2} \qquad (1)$$

si otterrebbe, sostituendo solo i primi due coefficienti

$$k\,a2\,x + k\,b2\,y + c1 = 0 \to a2\,x + b2\,y + \frac{c1}{k} = 0 \to \to a2\,x + b2\,y = -\frac{c1}{k}$$

Ma poiché dall'equazione di $r2$ è anche

$$a2\,x + b2\,y = -c2$$

si giunge ad una evidente contraddizione: in tal caso le due rette sono parallele e distinte e non hanno punti in comune.

La condizione (1) rappresenta quindi il legame che deve intercorrere tra i coefficienti di $r1$ e $r2$ affinché queste due rette siano parallele: in altre parole la (1) stabilisce che **rette aventi i coefficienti delle due variabili ordinatamente proporzionali sono parallele**. Se pure i termini noti stanno nello stesso rapporto le due rette coincidono.

Un'ultima osservazione: dalla condizione (1) discende pure che

$$-\frac{a1}{b1} = -\frac{a2}{b2} \to m1 = m2.$$

Ritroviamo quindi quanto già osservato precedentente a livello intuitivo ossia che rette parallele possiedono il medesimo coefficiente angolare.

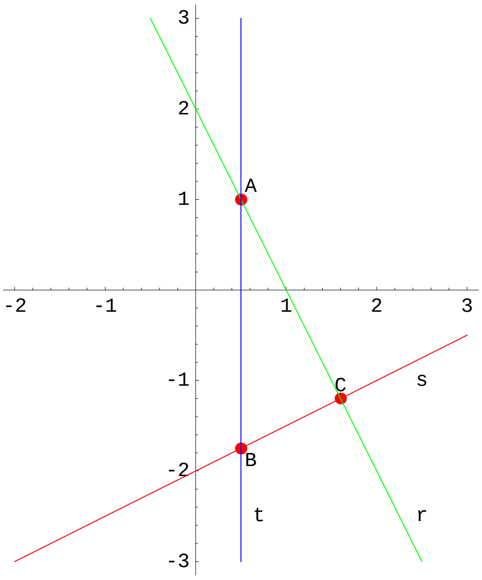
```
Clear["Global`*"]
```

Condizione di perpendicolarità tra rette

Determiniamo la condizione di perpendicolarità tra due rette partendo, per immediatezza, dalla forma esplicita. Siano quindi $r: \ y = m_1 \, x + q_1$ e $s: \ y = m_2 \, x + q_2$ due rette qualsiasi **perpendicolari** e sia $t: \ x = a$ una retta parallela all'asse delle ordinate introdotta al fine di visualizzare il triangolo rettangolo ABC (figura sottostante) formato dai punti di intersezione di queste tre rette.

```
r = y == m1 x + q1; s = y == m2 x + q2; t = x == a;
```

Supposto che $m_1 \neq m_2$ siano $A = r \cap t$, $B = s \cap t$ e $C = r \cap s$ i rispettivi punti di intersezione.




```
{puntoA = puntoIntersezione[r, t],
 puntoB = puntoIntersezione[s, t],
 puntoC = puntoIntersezione[r, s]}
```

$$\left\{\{a,\ a\,m1+q1\},\ \{a,\ a\,m2+q2\},\ \left\{-\frac{q1-q2}{m1-m2},\ -\frac{m2\,q1-m1\,q2}{m1-m2}\right\}\right\}$$

Dato che ΔABC è retto in C per ipotesi, tra i cateti AC e BC e l'ipotenusa AB vale il teorema di Pitagora cosicché determinate le loro lunghezze

```
{AB, AC, BC} =
 {distanza2Punti[puntoA, puntoB], distanza2Punti[puntoA, puntoC], distanza2Punti[puntoB, puntoC]}
```

$$\left\{\sqrt{(-a\,m1+a\,m2-q1+q2)^2},\ \sqrt{\left(-a-\frac{q1-q2}{m1-m2}\right)^2+\left(-a\,m1-q1-\frac{m2\,q1-m1\,q2}{m1-m2}\right)^2},\ \sqrt{\left(-a-\frac{q1-q2}{m1-m2}\right)^2+\left(-a\,m2-q2-\frac{m2\,q1-m1\,q2}{m1-m2}\right)^2}\right\}$$

dev'essere

```
condizione = AB^2 == AC^2 + BC^2 // Simplify
```

$$\frac{(1 + m1\, m2)\,(a\,(m1 - m2) + q1 - q2)}{m1 - m2} == 0$$

Volendo determinare un legame tra i coefficienti di r e s che sia indipendente dalla retta t cioè indipendente dal parametro a, risolviamo la precedente equazione nell'incognita m_2. Otteniamo i valori

```
Solve[condizione, m2]
```

$$\left\{\left\{m2 \to -\frac{1}{m1}\right\}, \left\{m2 \to \frac{a\, m1 + q1 - q2}{a}\right\}\right\}$$

ma solo il primo risulta accettabile in quanto indipendente dalla retta t e dal parametro a che la caratterizza. Ne segue che due rette perpendicolari date nella forma esplicita, dovranno avere coefficienti angolari reciproci ed opposti o tali da avere un prodotto pari a -1. Dev'essere quindi

$$m2 = -\frac{1}{m1}$$

Ricordando che $m = -\frac{a}{b}$ è l'espressione del coefficiente angolare in termini dei coefficienti della forma implicita della retta, la relazione appena trovata diviene

```
condPerp = -a2/b2 == -1/(-a1/b1)
```

$$-\frac{a2}{b2} == \frac{b1}{a1}$$

da cui moltiplicando entrambi i membri per il minimo comune denominatore

```
primoPassaggio = # a1 b2 & /@ condPerp
```

$$-a1\, a2 == b1\, b2$$

e riportando tutto a secondo membro

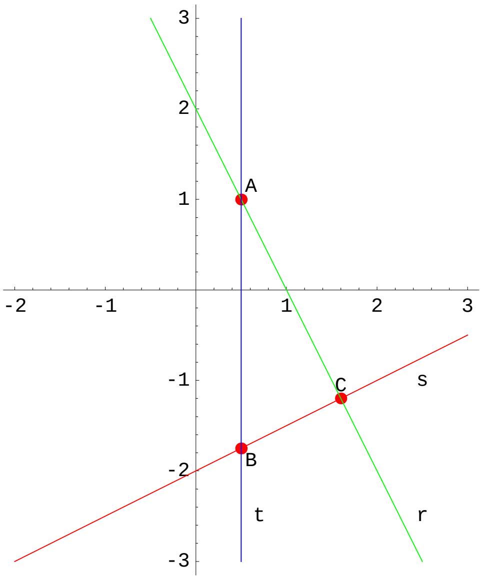
```
# + a1 a2 & /@ primoPassaggio
```

$$0 == a1\, a2 + b1\, b2$$

otteniamo la condizione di perpendicolarità per la forma implicita di r e s.

■ Istruzioni per la figura

```
Show[Graphics[{colore[rosso], PointSize[0.025], Point /@ {{1 / 2, -7 / 4}, {1 / 2, 1}, {8 / 5, -6 / 5}}}],
  Graphics[{Text["r", {2.5, -2.5}], Text["s", {2.5, -1}], Text["t", {.7, -2.5}], Text["B",
     {1 / 2, -7 / 4}, {-1, 1}], Text["A", {1 / 2, 1}, {-1, -1}], Text["C", {8 / 5, -6 / 5}, {0, -1}]}],
  graficoRette[{y == 1 / 2 x - 2, y == -2 x + 2, x == 1 / 2}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3},
   PlotStyle → colore /@ {rosso, verde, blu}, DisplayFunction → Identity],
  DisplayFunction → $DisplayFunction, Axes → True, AspectRatio → Automatic];
```




```
Clear["Global`*"]
```

Fasci di rette

Consideriamo l'equazione $y = m\,x + 1$ contenente il parametro m e facciamo variare questo tra -2 e 2 con incrementi unitari.

```
retta1 = y == m x + 1;
```

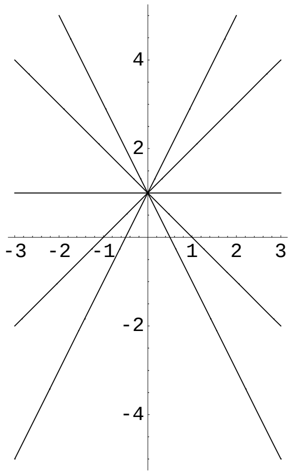
Le rette generate sono

```
fascio = Table[retta1, {m, -2, 2}]
```

```
{y == 1 - 2 x, y == 1 - x, y == 1, y == 1 + x, y == 1 + 2 x}
```

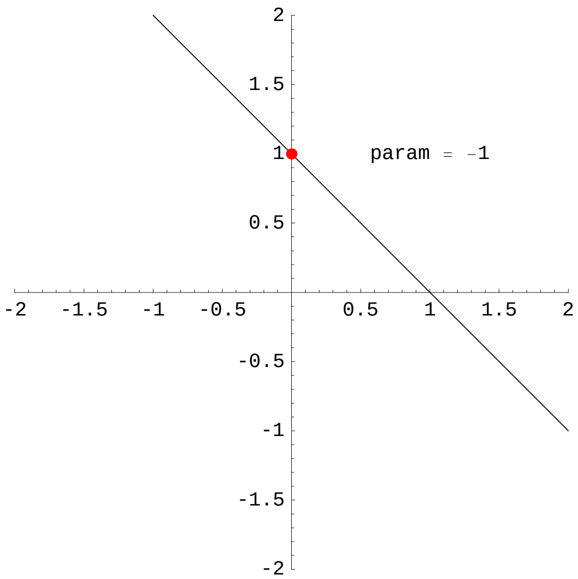
e il loro grafico è invece

```
graficoRette[fascio, {x, -3, 3}, {y, -5, 5}];
```



Appare evidente che queste rette passano per il punto $(0, 1)$. Tracciamo lo stesso insieme di rette, una dopo l'altra, associando a ciascuna il valore del parametro m (che è, incidentalmente, anche il loro coefficiente angolare) e osservando l'angolo che queste fanno con il semiasse positivo delle ascisse.

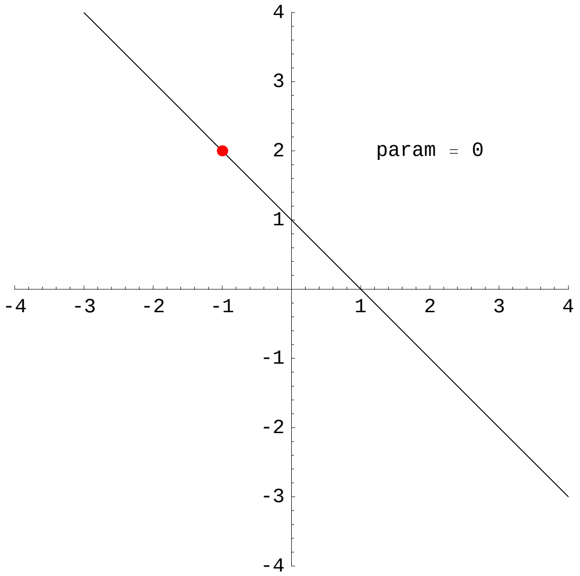
```
graficoAnimazioneFascio[retta1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, {m, -2, 2}, {0, 1}];
```



Consideriamo un altro insieme di rette descritto dall'equazione (esplicita) e tracciamo i rispettivi grafici in corrispondenza dei valori di k nell'intervallo $[-2, 2]$.

$$y = (k - 1)\, x + k + 1$$

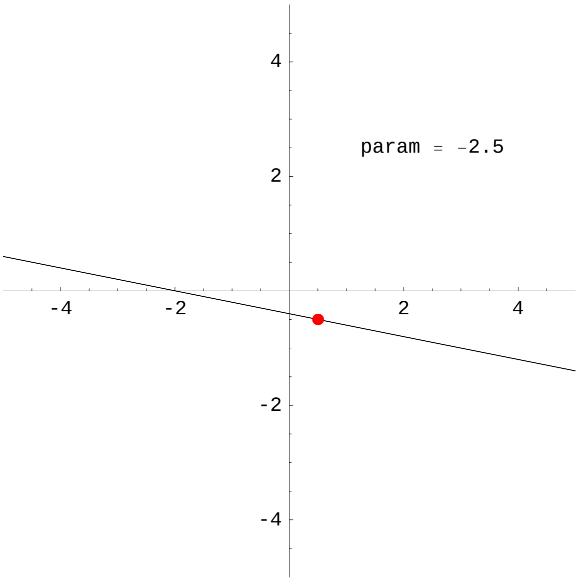
```
retta2 = y == (k - 1) x + k + 1;
graficoAnimazioneFascio[retta2, {x, -4, 4}, {y, -4, 4}, {k, -2, 2}, {-1, 2}];
```



Anche per questo insieme le diverse rette che si ottengono al variare del parametro appaiono avere in comune il punto $(-1, 2)$. L'esempio seguente definisce invece un insieme di rette tramite la forma implicita

$$(2+k)\,x + k\,y - 1 = 0$$

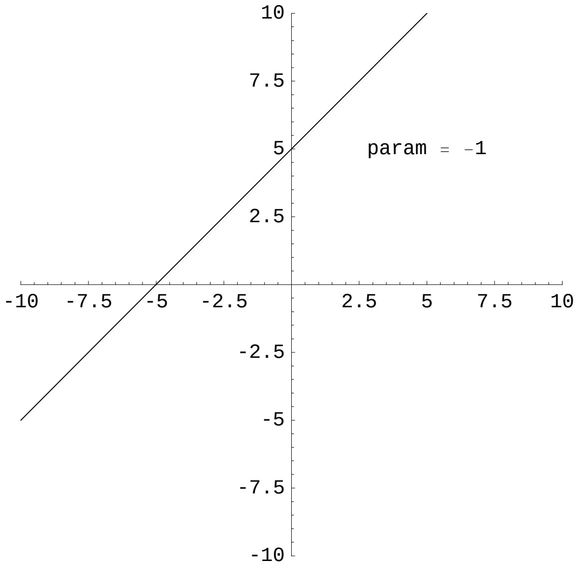
```
retta3 = (2 + k) x + k y - 1 == 0;
graficoAnimazioneFascio[retta3, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}, {k, -3, 3, 0.5}, centroFascio[retta3, k]];
```



Anche in questo terzo caso emerge l'appartenenza del punto $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ alle diverse rette tracciate. Un'equazione lineare in due variabili contenente un parametro sembra quindi in grado di rappresentare **un insieme di rette** ciascuna delle quali, per quanto visto, può avere un punto comune con le rimanenti. Detto in altro modo, un'equazione lineare parametrica può rappresentare un insieme di rette aventi un punto in comune: tale insieme di rette viene detto **fascio (**o **famiglia) di rette proprio** e il punto comune a tutte le rette di tale fascio, se esiste, è chiamato il **centro del fascio**. Più avanti vedremo come sia possibile individuare il centro di tali fasci. Analizziamo invece altre forme parametriche, per esempio l'equazione parametrica esplicita

$y = x - 3k + 2$

```
fascioImproprio = y == x - 3 k + 2;
graficoAnimazioneFascio[fascioImproprio, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}, {k, -3, 3}];
```



Diversamente dagli esempi precedenti, questa volta le rette appaiono tutte parallele e non esiste alcun punto che appartenga contemporaneamente a ciascuna di esse. Siamo quindi di fronte ad una equazione parametrica con caratteristiche sostanzialmente diverse dalle precedenti. Equazioni con tali caratteristiche possono quindi rappresentare insiemi di rette parallele che chiameremo **fasci impropri**. Ricordando quanto osservato circa il legame (non esplicitato) che deve intercorrere tra il coefficiente angolare e l'angolo che la retta definisce con il semiasse positivo delle x e la conseguente proprietà che afferma l'uguaglianza dei coefficienti angolari per rette parallele, risulta abbastanza facile riconoscere tali fasci. Assegnato un fascio (e quindi un'equazione parametrica di I grado) è sufficiente calcolare il coefficiente angolare e osservare se questo dipende o meno dal parametro. Nel caso sia indipendente da quest'ultimo, le rette dovranno necessariamente essere parallele (com'è in effetti nel nostro esempio, dove $m = 1$). Per esempio, il fascio $3kx + 2ky - 7 = 0$ è

```
coefficienteAngolare[3 k x + 2 k y - 7 == 0]
```

$-\frac{3}{2}$

un fascio improprio, mentre $(k-1)x + ky - 8k = 0$ non lo è

```
coefficienteAngolare[(k - 1) x + k y - 8 k == 0]
```

$-1 + \frac{1}{k}$

dato che il relativo coefficiente angolare risulta dipendente dal parametro k.

```
Clear["Global`*"]
```

Determinazione delle rette generatrici di un fascio e centro del fascio

In questa sezione mostriamo come si possa ricercare il centro di un fascio di rette proprio. A tale scopo va osservato che, se tale punto esiste, esso deve appartenere a tutte le rette del fascio, indipendentemente dal valore del parametro. Questo significa che le coordinate di questo punto dovranno essere

- indipendenti dal parametro (è per questo che talvolta lo si chiama pure il **punto fisso** del fascio).

D'altra parte la condizione di appartenenza di un punto ad una retta (o a qualsiasi altro insieme di punti) si traduce in geometria analitica nella

$$C\,(x0,\ y0) \in r : a\,x + b\,y + c = 0 \iff a\,x0 + b\,y0 + c = 0$$

- ossia le coordinate del centro C dovranno soddisfare all'equazione rappresentativa del fascio.

```
appartenenzaPuntoRetta[{x0, y0}, a x + b y + c == 0]
```

```
c + a x0 + b y0 == 0
```

Queste due proprietà ci permettono di individuare il centro di un fascio di rette (e, in generale, i punti fissi di un fascio di curve qualsiasi rappresentate da qualche equazione parametrica). Difatti, assegnato il fascio

$$f : 3\,x\,(1 + k) + 2\,y\,(2\,k - 1) - 12\,k - 30 = 0$$

```
fascio = 3 x (1 + k) + 2 y (2 k - 1) - 12 k - 30 == 0;
```

ordiniamolo secondo le potenze crescenti del parametro (cioè fattorizziamo il parametro in un membro)

```
Collect[First[fascio], k] == 0
```

```
-30 + 3 x - 2 y + k (-12 + 3 x + 4 y) == 0
```

Otteniamo

$$-30 + 3\,x - 2\,y + k\,(-12 + 3\,x + 4\,y) = 0 \tag{2}$$

La condizione di appartenenza del centro implica la ricerca delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -30 + 3\,x - 2\,y = 0 \\ -12 + 3\,x + 4\,y = 0 \end{cases} \tag{3}$$

in quanto, indipendentemente dal parametro k, l'equazione (2) si riduce alla $0 + k\,0 = 0$ e quindi risulta soddisfatta **qualsiasi sia il valore di k**. Nel caso che il sistema precedente abbia soluzione, la coppia di coordinate che la esprime individua un punto con coordinate

a) certamente indipendenti dal parametro (dato che il parametro non compare nel sistema) e

b) tali da soddisfare all'equazione.

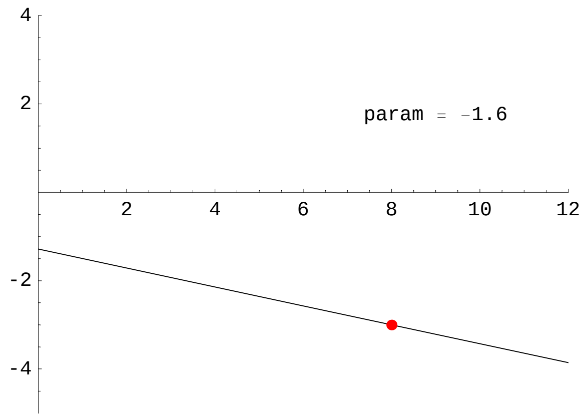
Sono quindi soddisfatte le proprietà assegnate inizialmente al centro del fascio. Nel nostro esempio la soluzione del sistema (3) fornisce le coordinate

```
centro = centroFascio[fascio, k]
```

```
{8, -3}
```

Un controllo visivo dell'animazione grafica di tale fascio conferma il risultato.

```
graficoAnimazioneFascio[fascio, {x, 0, 12}, {y, -5, 4}, {k, -2, 2, 0.2}, centro];
```



Il sistema (3) può comunque anche interpretarsi come la ricerca del punto comune alle rette di equazioni

$$r1 : -30 + 3x - 2y = 0 \quad r2 : -12 + 3x + 4y = 0$$

```
generatriciFascio[fascio, k]
```

```
{-30 + 3 x - 2 y == 0, -12 + 3 x + 4 y == 0}
```

la prima delle quali risulta essere una retta del fascio f dato che si ottiene da questo ponendo in (2), $k = 0$. La seconda invece non vi appartiene in quanto, riscritto il fascio come

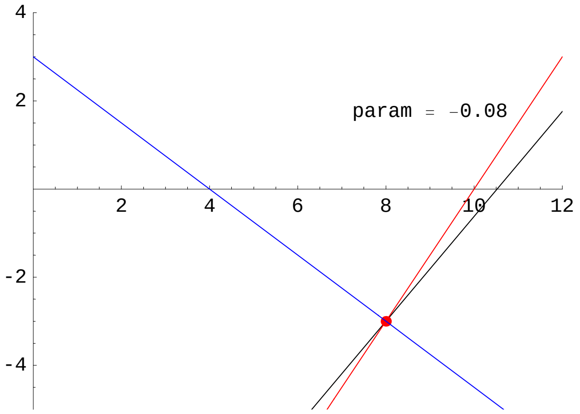
$$\frac{1}{k}(-30 + 3x - 2y) - 12 + 3x + 4y = 0,$$

non esiste alcun valore di k in corrispondenza del quale si abbia $\frac{1}{k} = 0$. Possiamo solo pensare che le rette del fascio si avvicinino alla retta $r2$ solo se $\frac{1}{k} \to 0$ ossia se $k \to \infty$. Le rette $r1$ e $r2$ ottenute uguagliando allo zero i coefficienti del parametro quando il fascio si sia riscritto nella forma

$$a x + b y + c + k (a1 x + b1 y + c1) = 0$$

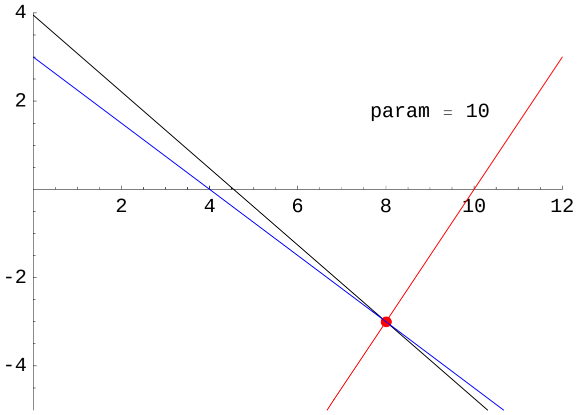
($a x + b y + c$ si può pensare quale coefficiente di k^0) vengono dette le **generatrici** (o **rette sostegno**) del fascio f. Nella successiva animazione, assieme al fascio, appaiono in colore le due rette generatrici.

```
graficoFascioGeneratrici[fascio, {x, 0, 12}, {y, -5, 4}, {k, -0.1, 0.1, 0.01}];
```



Variando ora l'intervallo dei valori del parametro si possono cogliere le due interessanti proprietà accennate sopra: se il parametro k si avvicina allo zero assumendo comunque valori positivi o negativi, le rette del fascio tendono alla retta $r1: -30+3x-2y=0$ mentre se a k assegnamo valori sempre maggiori in valore assoluto (andamento che sintetizziamo nella scrittura $k \to \infty$), allora le rette si avvicinano (molto lentamente) alla seconda generatrice, quella che non appartiene ad f (grafico sottostante).

```
graficoFascioGeneratrici[fascio, {x, 0, 12}, {y, -5, 4}, {k, 2, 30, 1}];
```



Tutte queste caratteristiche si possono generalizzare: un tale comportamento è tipico dei fasci f riconducibili alla forma

$$a\,x + b\,y + c + k\,(\mathrm{a1}\,x + \mathrm{b1}\,y + \mathrm{c1}) = 0$$

e quando il sistema di equazioni

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + c = 0 \\ \mathrm{a1}\,x + \mathrm{b1}\,y + \mathrm{c1} = 0 \end{cases}$$

risulta determinato, ossia quando il fascio sia proprio. Le equazioni presenti nel sistema individuano, come detto, le rette generatrici. Un particolare tipo di fascio proprio che rientra in quelli appena discussi risulta dato dall'equazione

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)\,.$$

Le sue rette generatrici sono le rette coordinate passanti per il centro $(x_0,\ y_0)$ e il parametro m rappresenta il coefficiente angolare delle rette di tale fascio.

Esistono infine fasci con caratteristiche più generali ma le loro proprietà verranno studiate di volta in volta.

```
Clear["Global`*"]
```

Distanza punto–retta esplicita

Intendiamo infine ottenere l'espressione della distanza di un punto $P(x0, y0)$ da una retta data nella forma esplicita, $r: y = m x + q$. A tal fine, costruita la retta per P perpendicolare a quella data

$$s: y = -\frac{1}{m}(x - x0) + y0$$

determiniamo il loro punto di intersezione, $r \cap s = P_1$

```
puntoP1 = puntoIntersezione[y == m x + q, y == -1/m (x - x0) + y0]
```

$$\left\{-\frac{m q - x0 - m y0}{1 + m^2}, -\frac{-q - m x0 - m^2 y0}{1 + m^2}\right\}$$

È sufficiente ora determinare la distanza di tale punto da P per giungere alla distanza

```
distanza2Punti[{x0, y0}, puntoP1] // Simplify
```

$$\sqrt{\frac{(q + m x0 - y0)^2}{1 + m^2}}$$

Semplificandone la scrittura, la distanza punto-retta (in forma esplicita) è,

$$d(P, r) = \frac{|y0 - (m x0 + q)|}{\sqrt{1 + m^2}}$$

```
Clear["Global`*"]
```