Introduzione alle derivate

■ Introduzione

Questo notebook di *Mathematica* presenta una lezione introduttiva sul significato di derivata di una funzione in un suo punto e, in particolare, introduce al suo significato geometrico. Dapprima si studia il grafico di una funzione ad ingrandimenti sempre maggiori nell'intorno di un punto del suo dominio notando come questo, nelle situazioni più semplici possa essere approssimato da una funzione lineare. Si analizza poi il comportamento delle rette secanti e del loro coefficiente angolare (o rapporto incrementale) al diminuire dell'incremento, suggerendo il significato intuitivo di retta tangente. Fornita la definizione formale di derivata si presenta infine il calcolo del limite del rapporto incrementale in alcune situazioni particolari.

Le parti in colore celeste (o in riquadro) riguardano il codice di *Mathematica* utilizzato per produrre i grafici e le tabelle e non sono necessarie per la comprensione della lezione.

Lorenzo Roi

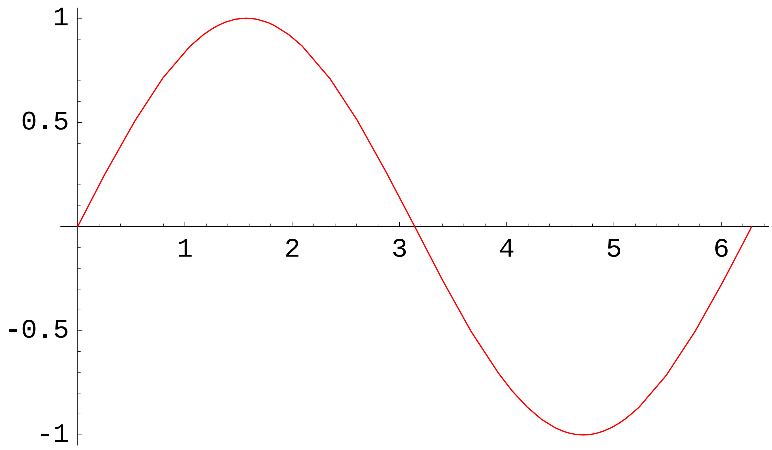
Grafico di una funzione in intorni di un punto

Iniziamo definendo una semplice e nota funzione goniometrica

```
f[x_] := Sin[x];
```

e rappresentiamone il grafico nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

```
Plot[f[x], {x, 0, 2π}, PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0]];
```

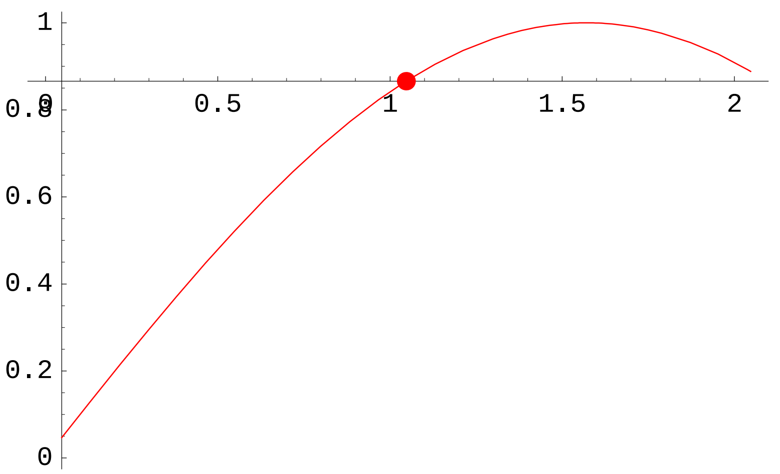


La nostra intenzione è di studiare tale grafico in intorni del punto $\left[\frac{\pi}{3}, \text{Sin}\left[\frac{\pi}{3}\right]\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$. A tal fine le istruzioni seguenti permettono di ottenere una serie di ingrandimenti in numero pari a **numZoom**, attorno al punto x_0 della funzione f e a partire da un intervallo centrato in x_0 avente come semiampiezza il valore di **semiAmpiezza**.

```
zoomFunzione[f_, x0_, semiAmpiezza_, numZoom_] :=
  Map[Show[Plot[f[x], {x, x0 - #, x0 + #}, AxesOrigin -> {x0 - #, f[x0]},
      PlotStyle → RGBColor[1, 0, 0], DisplayFunction → Identity],
     Graphics[{PointSize[0.025], RGBColor[1, 0, 0], Point[{x0, f[x0]}]}],
     DisplayFunction → $DisplayFunction] &,
   semiAmpiezza NestList[# / 2 &, 1, numZoom - 1]];
```

Di seguito otteniamo 10 ingrandimenti della funzione seno attorno al punto di ascissa $\frac{\pi}{3}$, a partire da un intervallo di semiampiezza unitaria.

```
zoomFunzione[f, π/3, 1, 10];
```



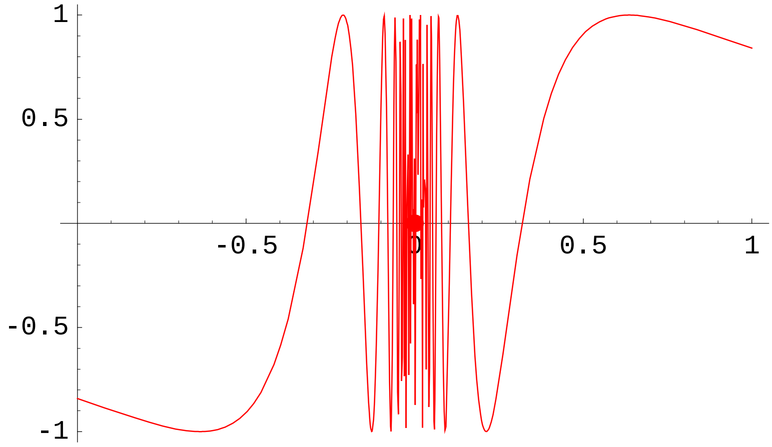
L'analisi dei diversi grafici, così come l'animazione che si può ottenere, mostra come all'aumentare dell'ingrandimento, il tratto di sinusoide tenda ad assumere un andamento rettilineo. In una scala molto piccola quindi potremo pensare di approssimare tale arco di sinusoide con un segmento e caratterizzare quest'ultimo per mezzo del coefficiente angolare della retta che lo comprende e che, evidentemente deve passare per $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$.

Al fine di vedere se tali osservazioni sono valide in generale, definiamo una seconda funzione e studiamone il comportamento in intorni dell'origine: la funzione g per $x \neq 0$ vale $\text{Sin}\left[\frac{1}{x}\right]$ mentre è nulla se $x = 0$.

```
g[x_] := Sin[1/x] /; x != 0
g[0] := 0;
```

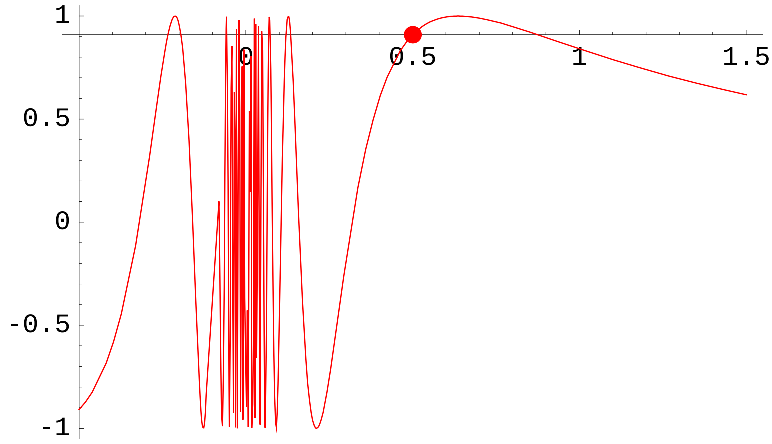
Uno zoom di 10 volte attorno all'origine fornisce i grafici seguenti

```
zoomFunzione[g, 0, 1, 10];
```



che manifestamente mostrano un comportamento del tutto diverso dal precedente (in ordinata la funzione continua ad oscillare tra 1 e -1 e all'aumentare dell'ingrandimento emegono nuove oscillazioni, sempre più fitte). Studiando la stessa funzione attorno al punto di ascissa 0.5 invece

```
zoomFunzione[g, 0.5, 1, 10];
```



otteniamo ancora l'andamento notato per la sinusoide. È evidente quindi che per una stessa funzione vi sono punti dove il comportamento del grafico, a scale sempre più piccole, risulta sostanzialmente differente. In particolare vi sono intorni di punti dove all'aumentare dell'ingrandimento il grafico della funzione tende ad assumere un andamento lineare mentre in altri appare sicuramente più complicato.

Nel primo caso potremo pensare di

- descrivere geometricamente l'andamento di tali funzioni con una retta passante per il punto in questione e che apparirà naturale identificare con la retta tangente, mentre
- dal punto di vista algebrico tale comportamento potrà essere riassunto per mezzo del coefficiente angolare di tale retta.

Nella sezione successiva cercheremo quindi di caratterizzare maggiormente le proprietà di quei punti dove l'andamento del grafico appare sostanzialmente semplice e assimilabile ad un segmento.

Definizione di rapporto incrementale e suo studio

Se il grafico di una funzione tende a divenire in intorni di un punto quello di un segmento potremo descrivere il suo andamento per mezzo di una retta passante per il punto in questione.

- Siccome per ogni relazione lineare (per esempio, $y = m x + q$) tra due variabili x e y sussiste la costanza del rapporto tra le variazioni della variabile dipendente y con le corrispondenti variazioni della variabile indipendente e ciò, nella geometria analitica, è espresso dalla costanza del coefficiente angolare

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

cercheremo di individuare per questa retta il suo parametro più significativo, cioè il suo coefficiente angolare. Di conseguenza in questa sezione studiamo, inizialmente dal punto di vista grafico e, successivamente in termini numerici, la variazione del coefficiente angolare di una retta passante per il punto di f, $P_0[x_0, f(x_0)]$ ritenuto fisso, e il punto $P[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ che invece verrà considerato variabile con h. Verrà quindi analizzata la convergenza o meno di tale coefficiente angolare al diminuire di h. La retta con tale coefficiente angolare che, più propriamente, viene definito **rapporto incrementale**,

> ***Definizione :***
> **rapporto incrementale** $= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

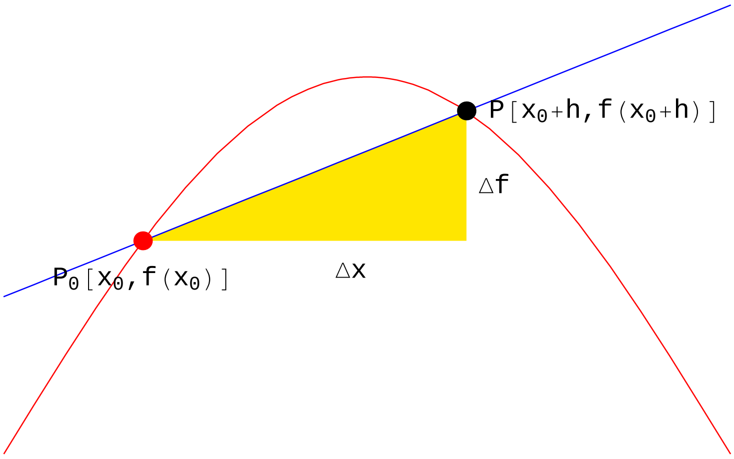
in quanto rapporto

- dell'incremento $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ della funzione e
- dell'incremento $\Delta x = (x_0 + h) - x_0 = h$ della variabile indipendente,

è evidentemente una retta secante il grafico di f,

La ***figura seguente*** mostra graficamente le convenzioni sui nomi, la retta secante e il triangolo avente per cateti i due incrementi, Δf e Δx.

```
Show[Graphics[{{RGBColor[1, .9, 0],
     Polygon[{{0.6, Sin[0.6]}, {2, Sin[2]}, {2, Sin[0.6]}}]}}],
  Plot[{f[x], Sin[0.6] + (Sin[2] - Sin[0.6])/1.4 * (x - 0.6)}, {x, 0, π},
   PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},
   DisplayFunction → Identity],
  Graphics[{{PointSize[0.025], RGBColor[1, 0, 0], Point[{0.6, Sin[0.6]}]},
    {PointSize[0.025], Point[{2, Sin[2]}]}}, DisplayFunction → Identity],
  Graphics[{Text["P₀[x₀,f(x₀)]", {0.6, Sin[0.6] - .1}],
    Text["P[x₀+h,f(x₀+h)]", {2.6, Sin[2]}],
    Text["Δf", {2.12, Sin[2] - 0.2}], Text["Δx", {1.5, Sin[0.6] - 0.08}]}],
  DisplayFunction → $DisplayFunction];
```



Definito (in linguaggio di *Mathematica*) il rapporto incrementale

```
rappIncrementale[f_, x0_, h_] := (f[h + x0] - f[x0])/h
```

e la retta secante,

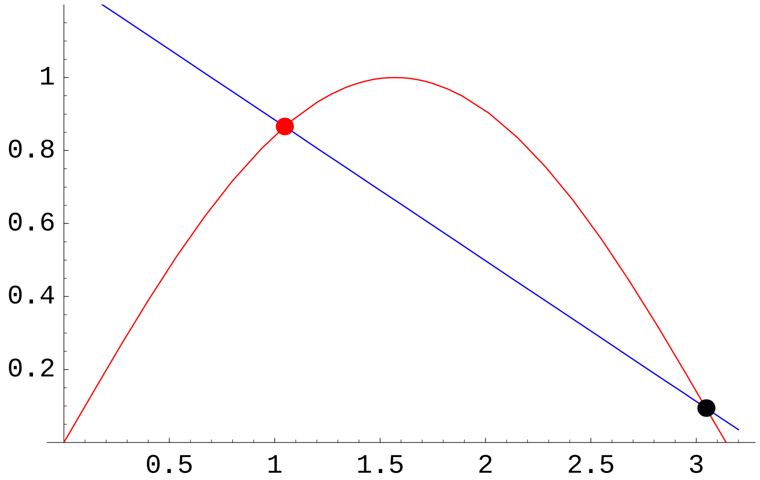
```
secante[f_, x_, x0_, h_] := rappIncrementale[f, x0, h] * (x - x0) + f[x0];
```

vediamo cosa succede tracciando via via le diverse rette secanti il grafico della funzione f nel punto di ascissa $\frac{\pi}{3}$ quando l'incremento h tende gradualmente a valori sempre più piccoli.

```
Options[graficiSecanti] = {estremiAssey → Automatic};
graficiSecanti[f_, x0_, {x1_, x2_}, incrMin_, nMax_, opts___Rule] :=
  Module[{estremiy = estremiAssey /. {opts} /. Options[graficiSecanti]},
   Map[Show[Plot[{f[x], secante[f, x, x0, (nMax - #) * incrMin]},
       {x, x1, x2}, PlotRange -> estremiy, PlotStyle →
        {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]}, DisplayFunction → Identity],
      Graphics[{PointSize[0.025], {RGBColor[1, 0, 0], Point[{x0, f[x0]}]},
        Point[{x0 + (nMax - #) * incrMin, f[x0 + (nMax - #) * incrMin]}]}],
      DisplayFunction → $DisplayFunction] &, Range[0, nMax - 1]]];
```

Scegliamo dapprima di seguire l'andamento delle secanti a partire da un incremento pari a $2 = 50\,x\,0.04$ per poi ridurlo in 50 passi fino ad un minimo di 0.04.

```
graficiSecanti[f, π/3, {0, 3.2}, 0.04, 50, estremiAssey → {0, 1.2}];
```

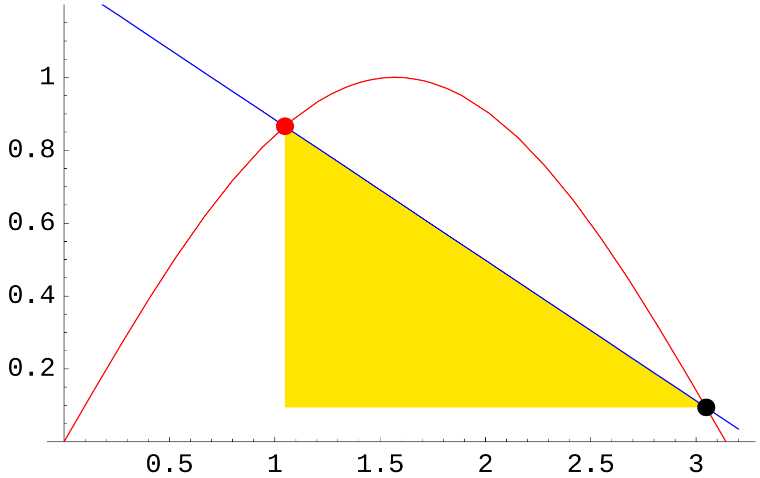


L'animazione mette in evidenza un fascio di rette proprio di centro $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$ tutte secanti il grafico di f e che, al diminuire dell'incremento, suggeriscono un avvicinamento alla retta tangente. Per quanto visto precedentemente, possiamo intuire che il ***rapporto incrementale*** (il loro coefficiente angolare) tenda ad assumere un valore prossimo a quello del segmento che caratterizzava il grafico della funzione a piccola scala. Per rafforzare tale osservazione mostriamo, ancora a livello grafico, il triangolo rettangolo che ha per cateti gli incrementi delle due variabili.

```
graficiSecantiTriangolo[f_,
   x0_, {x1_, x2_}, incrMin_, nMax_, opts___Rule] :=
  Module[{estremiy = estremiAssey /. {opts} /. Options[graficiSecanti]},
   Map[Show[Plot[{f[x], secante[f, x, x0, (nMax - #) * incrMin]}, {x, x1, x2},
       PlotRange -> estremiy, PlotStyle → {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0,
          1]}, DisplayFunction → Identity, Prolog → {{RGBColor[1, .9, 0],
          Polygon[{{x0 + (nMax - #) * incrMin, f[x0 + (nMax - #) * incrMin]},
            {x0, f[x0 + (nMax - #) * incrMin]}, {x0, f[x0]}}]}}],
      Graphics[{PointSize[0.025], {RGBColor[1, 0, 0], Point[{x0, f[x0]}]},
        Point[{x0 + (nMax - #) * incrMin, f[x0 + (nMax - #) * incrMin]}]}],
      DisplayFunction → $DisplayFunction] &, Range[0, nMax - 1]]];
```

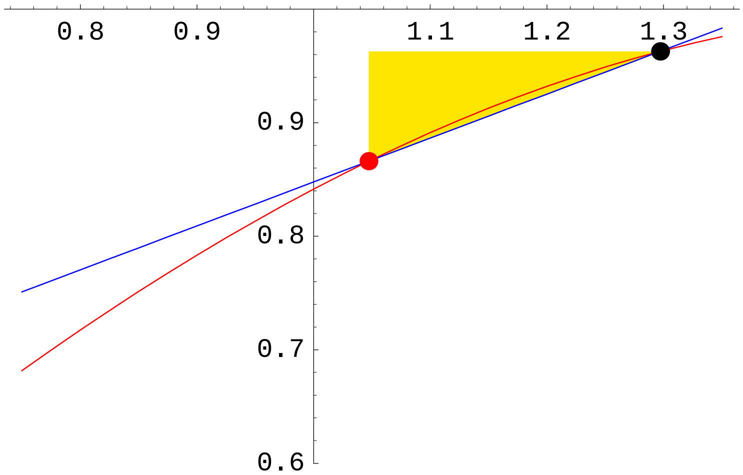
La nuova rappresentazione è ora

```
graficiSecantiTriangolo[f, π/3, {0, 3.2}, 0.04, 50, estremiAssey → {0, 1.2}];
```



La tendenza ad assumere un valore costante (e quindi per il triangolo assumere forme simili) appare in modo più marcato osservando il comportamento a piccole scale. Scegliamo a tale scopo di raggiungere, sempre con 50 passi, un incremento minimo di 0,005 a partire da un valore massimo di $0.005\,x\,50 = 0.25$.

```
graficiSecantiTriangolo[f, π/3,
  {0.75, 1.35}, 0.005, 50, estremiAssey → {0.6, 1}];
```

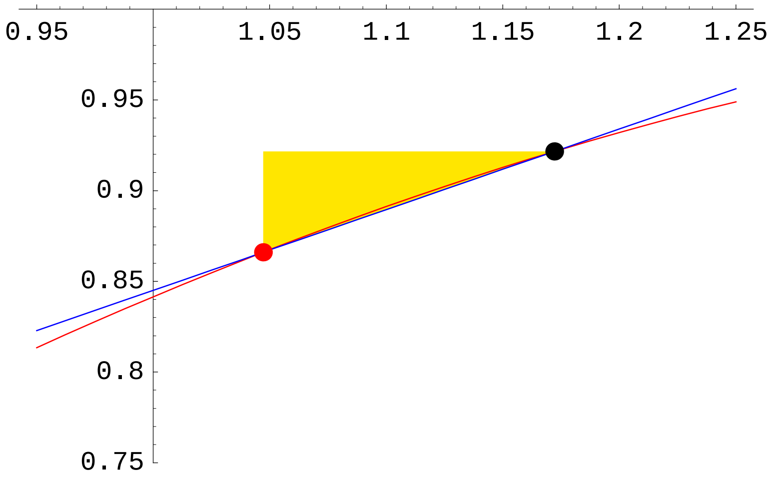


Avvicinandosi il punto variabile a quello fisso

- le rette secanti approssimano sempre meglio l'andamento della funzione in intorni del punto x_0 confondendosi con il grafico approssimativamente lineare di f. Possiamo ben dire quindi che tali rette si avvicinano a quella retta che, passando per x_0, approssima nel modo migliore l'andamento di f cioè la retta tangente. Contemporaneamente
- sembra diminuire la variabilità del loro coefficiente angolare:

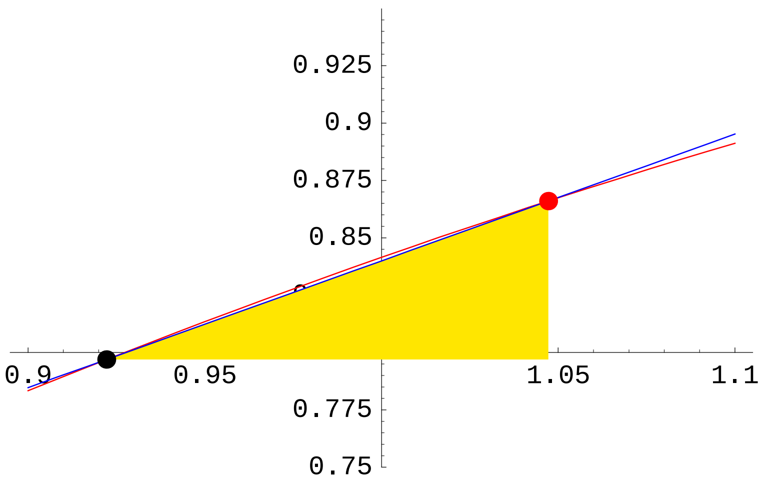
il rapporto incrementale della funzione pare quindi convergere. A scala ancora maggiore

```
graficiSecantiTriangolo[f, π/3,
  {0.95, 1.25}, 0.0025, 50, estremiAssey → {0.75, 1}];
```



queste osservazioni appaiono sempre più confermate. Analogamente se si considerano incrementi negativi

```
graficiSecantiTriangolo[f, π/3,
  {0.9, 1.1}, -0.0025, 50, estremiAssey → {0.75, 0.95}];
```



Per analizzare con maggior precisione la variabilità del ***rapporto incrementale*** conviene passare al suo calcolo numerico esplicito. Nella ***tabella seguente*** si sono quindi calcolati 100 rapporti incrementali sia in intorni destri che sinistri di $\frac{\pi}{3}$ a partire da un'ampiezza massima unitaria. Il più piccolo incremento è quindi, in valore assoluto, pari a 0.01.

```
tavolaCoeffAngolare[f_, x0_, semiAmpiezza_, nMax_] := Sort[Flatten[
    Map[{N[{semiAmpiezza / #, rappIncrementale[f, x0, semiAmpiezza / #]}],
       N[{-semiAmpiezza / #, rappIncrementale[f, x0, -semiAmpiezza / #]}]} &,
    Range[nMax]], 1], #2^2 < #1^2 &];
```

Nella tabella le coppie (incremento, rapporto incrementale) sono ordinate secondo il valore decrescente del valore assoluto dell'incremento h in modo da poter osservare più facilmente la convergenza del rapporto incrementale al diminuire (del valore assoluto) di h.

```
TableForm[tavolaCoeffAngolare[f, π/3, 1, 100],
 TableHeadings → {None, {StyleForm["h", FontFamily → "Courier-Bold"],
    StyleForm["rapporto incrementale", FontFamily → "Courier-Bold"]}}]
```

h	rapporto incrementale
1.	0.0226256
-1.	0.818845
0.5	0.267392
-0.5	0.691459
0.333333	0.347786
-0.333333	0.633798
0.25	0.387117
-0.25	0.602498
0.2	0.410359
-0.2	0.582988
0.166667	0.425687
-0.166667	0.56969
0.142857	0.436547
-0.142857	0.560055
0.125	0.444643
-0.125	0.552755
0.111111	0.450909
-0.111111	0.547035
0.1	0.455902
-0.1	0.542432
0.0909091	0.459974
-0.0909091	0.538649
0.0833333	0.463358
-0.0833333	0.535485
0.0769231	0.466215
-0.0769231	0.532799
0.0714286	0.468659
-0.0714286	0.530491
0.0666667	0.470773
-0.0666667	0.528487
0.0625	0.47262
-0.0625	0.526729
0.0588235	0.474248
-0.0588235	0.525176
0.0555556	0.475693
-0.0555556	0.523793
0.0526316	0.476984
-0.0526316	0.522554
0.05	0.478146
-0.05	0.521438
0.047619	0.479195

−0.047619	0.520427
0.0454545	0.480149
−0.0454545	0.519507
0.0434783	0.481019
−0.0434783	0.518666
0.0416667	0.481816
−0.0416667	0.517895
0.04	0.482548
−0.04	0.517185
0.0384615	0.483224
−0.0384615	0.516529
0.037037	0.48385
−0.037037	0.515921
0.0357143	0.484431
−0.0357143	0.515357
0.0344828	0.484971
−0.0344828	0.514831
0.0333333	0.485475
−0.0333333	0.51434
0.0322581	0.485946
−0.0322581	0.51388
0.03125	0.486388
−0.03125	0.513449
0.030303	0.486803
−0.030303	0.513044
0.0294118	0.487193
−0.0294118	0.512663
0.0285714	0.487561
−0.0285714	0.512303
0.0277778	0.487908
−0.0277778	0.511963
0.027027	0.488237
−0.027027	0.511641
0.0263158	0.488548
−0.0263158	0.511337
0.025641	0.488843
−0.025641	0.511047
0.025	0.489123
−0.025	0.510773
0.0243902	0.48939
−0.0243902	0.510511
0.0238095	0.489643
−0.0238095	0.510262
0.0232558	0.489885
−0.0232558	0.510025
0.0227273	0.490116
−0.0227273	0.509798
0.0222222	0.490337
−0.0222222	0.509581
0.0217391	0.490548
−0.0217391	0.509374
0.0212766	0.49075

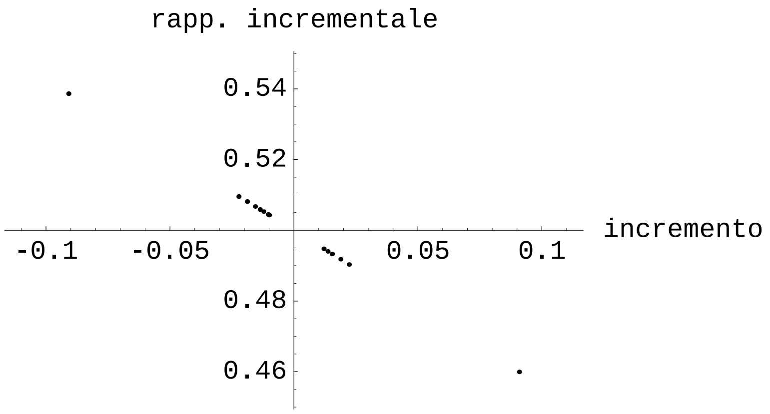
−0.0212766	0.509175
0.0208333	0.490943
−0.0208333	0.508985
0.0204082	0.491129
−0.0204082	0.508802
0.02	0.491307
−0.02	0.508627
0.0196078	0.491478
−0.0196078	0.508458
0.0192308	0.491642
−0.0192308	0.508296
0.0188679	0.491801
−0.0188679	0.50814
0.0185185	0.491953
−0.0185185	0.50799
0.0181818	0.4921
−0.0181818	0.507845
0.0178571	0.492241
−0.0178571	0.507706
0.0175439	0.492378
−0.0175439	0.507571
0.0172414	0.49251
−0.0172414	0.507441
0.0169492	0.492637
−0.0169492	0.507315
0.0166667	0.49276
−0.0166667	0.507194
0.0163934	0.492879
−0.0163934	0.507076
0.016129	0.492994
−0.016129	0.506962
0.015873	0.493106
−0.015873	0.506852
0.015625	0.493214
−0.015625	0.506745
0.0153846	0.493319
−0.0153846	0.506642
0.0151515	0.49342
−0.0151515	0.506542
0.0149254	0.493519
−0.0149254	0.506444
0.0147059	0.493614
−0.0147059	0.50635
0.0144928	0.493707
−0.0144928	0.506258
0.0142857	0.493797
−0.0142857	0.506169
0.0140845	0.493885
−0.0140845	0.506082
0.0138889	0.49397
−0.0138889	0.505998
0.0136986	0.494053

−0.0136986	0.505916
0.0135135	0.494133
−0.0135135	0.505836
0.0133333	0.494212
−0.0133333	0.505759
0.0131579	0.494288
−0.0131579	0.505683
0.012987	0.494362
−0.012987	0.505609
0.0128205	0.494435
−0.0128205	0.505538
0.0126582	0.494506
−0.0126582	0.505468
0.0125	0.494574
−0.0125	0.5054
0.0123457	0.494642
−0.0123457	0.505333
0.0121951	0.494707
−0.0121951	0.505268
0.0120482	0.494771
−0.0120482	0.505205
0.0119048	0.494833
−0.0119048	0.505143
0.0117647	0.494894
−0.0117647	0.505083
0.0116279	0.494954
−0.0116279	0.505024
0.0114943	0.495012
−0.0114943	0.504966
0.0113636	0.495069
−0.0113636	0.50491
0.011236	0.495124
−0.011236	0.504855
0.0111111	0.495179
−0.0111111	0.504801
0.010989	0.495232
−0.010989	0.504748
0.0108696	0.495284
−0.0108696	0.504697
0.0107527	0.495334
−0.0107527	0.504646
0.0106383	0.495384
−0.0106383	0.504597
0.0105263	0.495433
−0.0105263	0.504549
0.0104167	0.49548
−0.0104167	0.504501
0.0103093	0.495527
−0.0103093	0.504455
0.0102041	0.495573
−0.0102041	0.50441
0.010101	0.495618


```
-0.010101     0.504365
0.01          0.495662
-0.01         0.504322
```

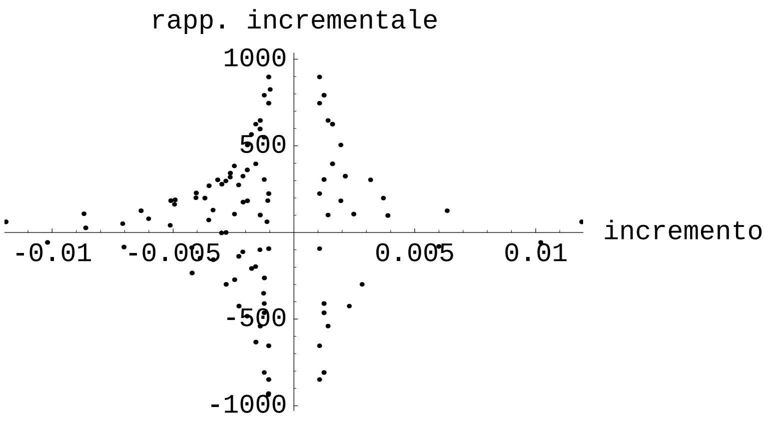
La rappresentazione grafica di questi coppie di valori mostra chiaramente la tendenza per il rapporto incrementale a convergere verso un determinato valore (= 0.5) al tendere allo zero dell'incremento.

```
ListPlot[tavolaCoeffAngolare[f, π/3, 1, 100],
  AxesLabel → {"incremento", "rapp. incrementale"}];
```



Per mostrare come nel caso della ***funzione g*** e nel punto di ascissa nulla l'andamento del rapporto incrementale sia totalmente diverso proponiamo lo stesso calcolo eseguito sopra per la f e nel quale l'intervallo iniziale di ampiezza unitaria (sia destra che sinistra) è stato gradualmente suddiviso in intervalli sempre più piccoli fino ad arrivare ad un valore minimo per l'incremento pari a 10^{-3}.

```
ListPlot[tavolaCoeffAngolare[g, 0, 1, 10^3],
  AxesLabel → {"incremento", "rapp. incrementale"}];
```



Come si vede possiamo ben dire che al tendere allo zero dell'incremento non esista un valore definito verso il quale il rapporto incrementale appaia convergere.

Infine, per rendere l'esito del calcolo precedente ancora più manifesto forniamo una tabella dove assegnamo all'incremento h valori molto piccoli: corrispondentemente, il rapporto incrementale mostra chiaramente una convergenza verso il valore 0.5.

```
tabellaRappIncrementale[f_, x0_, n_] :=
 Map[{N[1 / 10^#], rappIncrementale[f, x0, N[1 / 10^#]]} &, Range[n]]
```

```
TableForm[tabellaRappIncrementale[f, π/3, 10],
 TableHeadings → {None, {"h", "rapporto incrementale"}}]
```

h	rapporto incrementale
0.1	0.455902
0.01	0.495662
0.001	0.499567
0.0001	0.499957
0.00001	0.499996
$1.\times 10^{-6}$	0.5
$1.\times 10^{-7}$	0.5
$1.\times 10^{-8}$	0.5
$1.\times 10^{-9}$	0.5
$1.\times 10^{-10}$	0.5

Riprendendo la ***funzione g*** analizziamo pure per essa e per mezzo del calcolo l'andamento del rapporto incrementale in intorni, questa volta, del punto di ascissa 0.5.

```
TableForm[tabellaRappIncrementale[g, 0.5, 10],
 TableHeadings → {None, {"h", "rapporto incrementale"}}]
```

h	rapporto incrementale
0.1	0.861105
0.01	1.56162
0.001	1.65402
0.0001	1.66353
0.00001	1.66448
$1.\times 10^{-6}$	1.66458
$1.\times 10^{-7}$	1.66459
$1.\times 10^{-8}$	1.66459
$1.\times 10^{-9}$	1.66459
$1.\times 10^{-10}$	1.66459

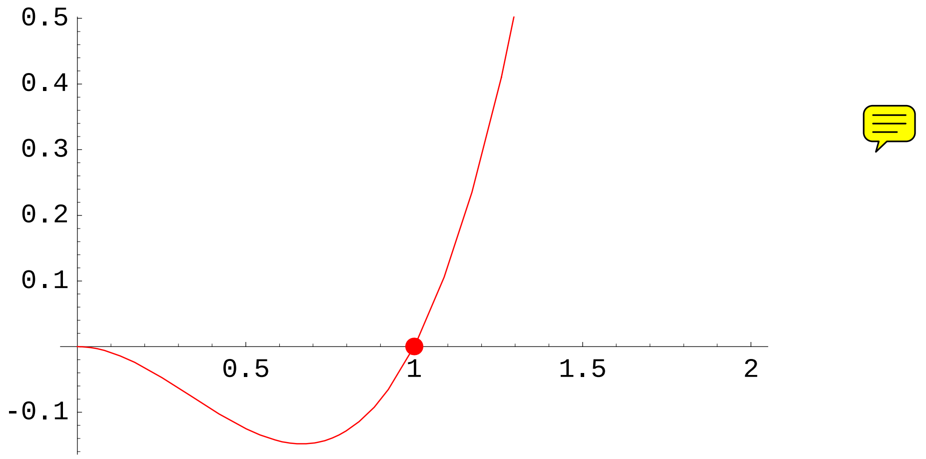
Anche in questo caso emerge la convergenza del rapporto verso il valore 1.66459.

Concludiamo ripercorrendo per una terza funzione t lo studio, sia grafico che numerico, del rapporto incrementale. Definita la funzione come


```
t[x_] := x^2 (x - 1)
```

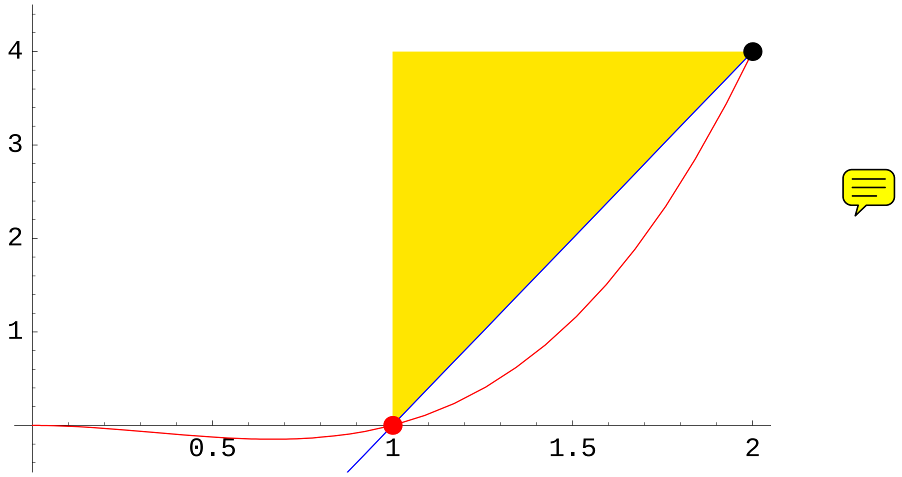
uno zoom attorno al suo pnto di ascissa 1 mostra

```
zoomFunzione[t, 1, 1, 10];
```



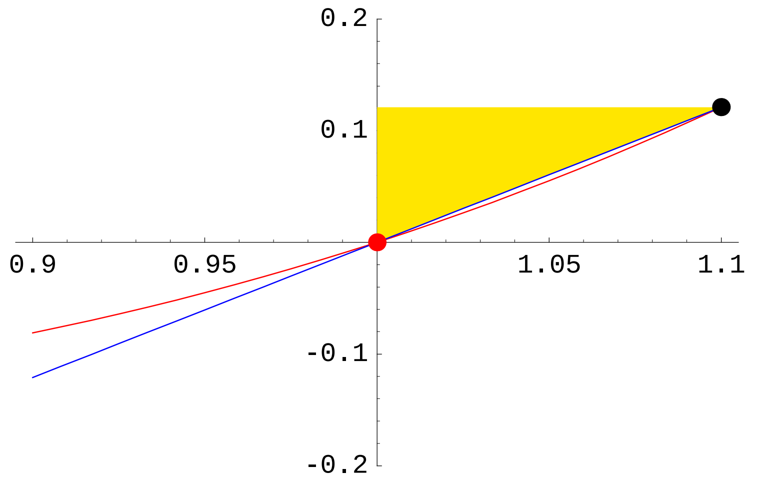
l'esistenza di un andamento approssimativamente lineare a piccola scala. Evidenziando il triangolo coinvolgente gli incrementi abbiamo

```
graficiSecantiTriangolo[t, 1, {0, 2}, 0.02, 50, estremiAssey → {-.5, 4.5}];
```



e la costanza del rapporto appare più evidente se si passa a scale più piccole.

```
graficiSecantiTriangolo[t, 1,
  {0.9, 1.1}, 0.002, 50, estremiAssey → {-.2, 0.2}];
```



Passando al calcolo numerico dei rapporti a partire da un incremento unitario per giungere al valore di 10^{-2} si ottiene

```
TableForm[tavolaCoeffAngolare[t, 1, 1, 100],
 TableHeadings → {None, {StyleForm["h", FontFamily → "Courier-Bold"],
    StyleForm["rapporto incrementale", FontFamily → "Courier-Bold"]}}]
```

h	rapporto incrementale
1.	4.
−1.	0.
0.5	2.25
−0.5	0.25
0.333333	1.77778
−0.333333	0.444444
0.25	1.5625
−0.25	0.5625
0.2	1.44
−0.2	0.64
0.166667	1.36111
−0.166667	0.694444
0.142857	1.30612
−0.142857	0.734694
0.125	1.26563
−0.125	0.765625
0.111111	1.23457
−0.111111	0.790123
0.1	1.21
−0.1	0.81
0.0909091	1.19008
−0.0909091	0.826446
0.0833333	1.17361
−0.0833333	0.840278
0.0769231	1.15976
−0.0769231	0.852071
0.0714286	1.14796
−0.0714286	0.862245
0.0666667	1.13778
−0.0666667	0.871111

0.0625	1.12891
−0.0625	0.878906
0.0588235	1.12111
−0.0588235	0.885813
0.0555556	1.1142
−0.0555556	0.891975
0.0526316	1.10803
−0.0526316	0.897507
0.05	1.1025
−0.05	0.9025
0.047619	1.09751
−0.047619	0.907029
0.0454545	1.09298
−0.0454545	0.911157
0.0434783	1.08885
−0.0434783	0.914934
0.0416667	1.08507
−0.0416667	0.918403
0.04	1.0816
−0.04	0.9216
0.0384615	1.0784
−0.0384615	0.924556
0.037037	1.07545
−0.037037	0.927298
0.0357143	1.0727
−0.0357143	0.929847
0.0344828	1.07015
−0.0344828	0.932224
0.0333333	1.06778
−0.0333333	0.934444
0.0322581	1.06556
−0.0322581	0.936524
0.03125	1.06348
−0.03125	0.938477
0.030303	1.06152
−0.030303	0.940312
0.0294118	1.05969
−0.0294118	0.942042
0.0285714	1.05796
−0.0285714	0.943673
0.0277778	1.05633
−0.0277778	0.945216
0.027027	1.05478
−0.027027	0.946676
0.0263158	1.05332
−0.0263158	0.948061
0.025641	1.05194
−0.025641	0.949375
0.025	1.05063
−0.025	0.950625
0.0243902	1.04938
−0.0243902	0.951814

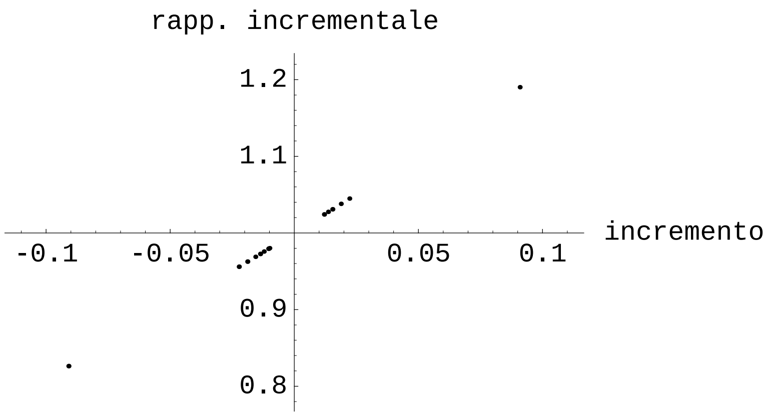
0.0238095	1.04819
−0.0238095	0.952948
0.0232558	1.04705
−0.0232558	0.954029
0.0227273	1.04597
−0.0227273	0.955062
0.0222222	1.04494
−0.0222222	0.956049
0.0217391	1.04395
−0.0217391	0.956994
0.0212766	1.04301
−0.0212766	0.9579
0.0208333	1.0421
−0.0208333	0.958767
0.0204082	1.04123
−0.0204082	0.9596
0.02	1.0404
−0.02	0.9604
0.0196078	1.0396
−0.0196078	0.961169
0.0192308	1.03883
−0.0192308	0.961908
0.0188679	1.03809
−0.0188679	0.96262
0.0185185	1.03738
−0.0185185	0.963306
0.0181818	1.03669
−0.0181818	0.963967
0.0178571	1.03603
−0.0178571	0.964605
0.0175439	1.0354
−0.0175439	0.96522
0.0172414	1.03478
−0.0172414	0.965815
0.0169492	1.03419
−0.0169492	0.966389
0.0166667	1.03361
−0.0166667	0.966944
0.0163934	1.03306
−0.0163934	0.967482
0.016129	1.03252
−0.016129	0.968002
0.015873	1.032
−0.015873	0.968506
0.015625	1.03149
−0.015625	0.968994
0.0153846	1.03101
−0.0153846	0.969467
0.0151515	1.03053
−0.0151515	0.969927
0.0149254	1.03007
−0.0149254	0.970372

0.0147059	1.02963
−0.0147059	0.970804
0.0144928	1.0292
−0.0144928	0.971225
0.0142857	1.02878
−0.0142857	0.971633
0.0140845	1.02837
−0.0140845	0.972029
0.0138889	1.02797
−0.0138889	0.972415
0.0136986	1.02758
−0.0136986	0.97279
0.0135135	1.02721
−0.0135135	0.973156
0.0133333	1.02684
−0.0133333	0.973511
0.0131579	1.02649
−0.0131579	0.973857
0.012987	1.02614
−0.012987	0.974195
0.0128205	1.02581
−0.0128205	0.974523
0.0126582	1.02548
−0.0126582	0.974844
0.0125	1.02516
−0.0125	0.975156
0.0123457	1.02484
−0.0123457	0.975461
0.0121951	1.02454
−0.0121951	0.975758
0.0120482	1.02424
−0.0120482	0.976049
0.0119048	1.02395
−0.0119048	0.976332
0.0117647	1.02367
−0.0117647	0.976609
0.0116279	1.02339
−0.0116279	0.976879
0.0114943	1.02312
−0.0114943	0.977144
0.0113636	1.02286
−0.0113636	0.977402
0.011236	1.0226
−0.011236	0.977654
0.0111111	1.02235
−0.0111111	0.977901
0.010989	1.0221
−0.010989	0.978143
0.0108696	1.02186
−0.0108696	0.978379
0.0107527	1.02162
−0.0107527	0.97861

0.0106383	1.02139
−0.0106383	0.978837
0.0105263	1.02116
−0.0105263	0.979058
0.0104167	1.02094
−0.0104167	0.979275
0.0103093	1.02072
−0.0103093	0.979488
0.0102041	1.02051
−0.0102041	0.979696
0.010101	1.0203
−0.010101	0.9799
0.01	1.0201
−0.01	0.9801

tabella che genera la rappresentazione grafica seguente e che conferma la convergenza del rapporto verso l'unità.

```
ListPlot[tavolaCoeffAngolare[t, 1, 1, 100],
  AxesLabel → {"incremento", "rapp. incrementale"}];
```



Diminuendo sensibilmente l'incremento, si ha infine

```
TableForm[tabellaRappIncrementale[t, 1, 10],
 TableHeadings → {None, {"h", "rapp. incrementale"}}]
```

h	rapp. incrementale
0.1	1.21
0.01	1.0201
0.001	1.002
0.0001	1.0002
0.00001	1.00002
$1.\times 10^{-6}$	1.
$1.\times 10^{-7}$	1.
$1.\times 10^{-8}$	1.
$1.\times 10^{-9}$	1.
$1.\times 10^{-10}$	1.

che ci permette di affermare come il rapporto incrementale, calcolato in intorni del punto $x_0 = 1$, tenda al valore 1 al tendere allo zero dell'incremento.

In definitiva possiamo riassumere l'esito della nostra analisi nelle osservazioni seguenti (già parzialmente esposte in precedenza) e relative alle proprietà caratterizzanti solo determinati punti delle funzioni studiate:

- dal punto di vista geometrico: al tendere del punto P a P_0, le rette secanti approssimano sempre meglio l'andamento della funzione f confondendosi con il suo grafico approssimativamente lineare. Queste rette si avvicinano ad una retta limite (la tangente) che, passante per x_0, approssima nel modo migliore l'andamento di f:
- dal punto di vista numerico: al tendere allo 0 dell'incremento h, la variabilità del rapporto incrementale diminuisce e questo mostra di convergere ad un ben preciso limite.

Definizione di derivata in un punto

Nelle precedenti sezioni abbiamo fornito la ***definizione di rapporto incrementale*** di una funzione in un suo punto e studiato il suo andamento sia tramite la grafica che numericamente. Tutto ciò giustifica, almeno a livello intuitivo, la definizione seguente:

***Definizione*. Si definisce derivata di una funzione f in un suo punto x_0 il limite, se esiste finito, del rapporto incrementale, al tendere allo zero dell'incremento h.**

Simbolicamente

$$f'(x_0) = \mathrm{Lim}_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad con \quad f'(x_0) \in R$$

Poiché poi, a livello geometrico, la retta tangente nel punto $P_0[x_0, f(x_0)]$ del grafico della funzione f viene definita come il limite, se esiste, della retta secante al tendere del punto $Q[x_0 + h, f(x_0 + h)]$ a P_0 ossia al tendere allo zero di h, possiamo identificare la derivata in x_0 come il coefficiente angolare della retta tangente. L'equazione di questa retta è, nell'ipotesi di esistenza del limite dato sopra,

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Esempi di calcolo formale di derivate

Procediamo in questa sezione al calcolo formale della derivata delle tre funzioni che abbiamo studiato precedentemente. Per la funzione f nel punto $\frac{\pi}{3}$ il rapporto incrementale risulta

$$\text{rappIncrementale}\left[f, \frac{\pi}{3}, h\right]$$

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{Sin}\left[h + \frac{\pi}{3}\right]}{h}$$

Sviluppando il seno a numeratore si ha

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \text{TrigExpand}\left[\text{Sin}\left[h + \frac{\pi}{3}\right]\right]}{h}$$

$$\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\text{Cos}[h] + \frac{\text{Sin}[h]}{2}}{h}$$

e in questa espressione se si usano le formule di duplicazione e bisezione per il seno si può fattorizzare a numeratore un fattore comune.

$$\frac{\text{TrigFactor}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\,\text{Cos}[h] + \frac{\text{Sin}[h]}{2}\right]}{h}$$

$$-\frac{\text{Sin}\left[\frac{h}{2}\right]\left(-\text{Cos}\left[\frac{h}{2}\right] + \sqrt{3}\,\text{Sin}\left[\frac{h}{2}\right]\right)}{h}$$

Quest'ultima si può riscrivere come

$$\frac{\text{Sin}\left[\frac{h}{2}\right]}{\frac{h}{2}}\;\frac{1}{2}\left(\text{Cos}\left[\frac{h}{2}\right] - \sqrt{3}\,\text{Sin}\left[\frac{h}{2}\right]\right)$$

$$\frac{\text{Sin}\left[\frac{h}{2}\right]\left(\text{Cos}\left[\frac{h}{2}\right] - \sqrt{3}\,\text{Sin}\left[\frac{h}{2}\right]\right)}{h}$$

per cui tenendo conto del primo limite fondamentale e della continuità del seno e coseno, il limite di tale espressione fornisce

```
Limit[Sin[h/2]/(h/2) 1/2 (Cos[h/2] - √3 Sin[h/2]), h → 0]
```

$$\frac{1}{2}$$

in accordo con ***quanto ottenuto*** numericamente.

Per la ***funzione t*** calcoliamo, inizialmente nel punto generico di ascissa x_0, il rapporto incrementale

```
rappIncrementale[t, x0, h]
```

$$\frac{-(-1+x0)\,x0^2+(-1+h+x0)\,(h+x0)^2}{h}$$

Eseguendo i quadrati e raccogliendo i fattori comuni si ottiene per il numeratore

```
Factor[Expand[-(-1 + x0) x0^2 + (-1 + h + x0) (h + x0)^2]]
```

$$h\,(-h+h^2-2\,x0+3\,h\,x0+3\,x0^2)$$

per cui semplificando discende

```
Simplify[(h (-h + h^2 - 2 x0 + 3 h x0 + 3 x0^2))/h]
```

$$h^2+x0\,(-2+3\,x0)+h\,(-1+3\,x0)$$

Volendo la derivata nel punto $x_0 = 1$, si sostituisce questo valore ad x_0 giungendo a

```
h^2 + x0 (-2 + 3 x0) + h (-1 + 3 x0) /. {x0 → 1}
```

$$1+2\,h+h^2$$

ed eseguendo il limite di tale argomento per $h \to 0$ appare immediato ottenere

```
Limit[1 + 2 h + h^2, h → 0]
```

$$1$$

che è il valore pure ***aspettato***.

Passiamo infine al calcolo del limite del rapporto incrementale per la ***funzione g*** nel punto $x_0 = \frac{1}{2}$. Per poterla trattare formalmente conviene ridefinirla (non siamo più interessati al suo valore nell'origine)

```
Clear[g];
g[x_] := Sin[1/x];
```

Il rapporto incrementale nel punto di ascissa $\frac{1}{2}$ risulta

```
rappIncrementale[g, 1/2, h]
```

$$\frac{-\mathrm{Sin}[2] + \mathrm{Sin}\left[\frac{1}{\frac{1}{2}+h}\right]}{h}$$

che, tramite le formule di prostaferesi, si riscrive come

$$-\frac{2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1+h}{\frac{1}{2}+h}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{h}{\frac{1}{2}+h}\right]}{h}$$

$$-\frac{2\,\mathrm{Cos}\left[\frac{1+h}{\frac{1}{2}+h}\right]\mathrm{Sin}\left[\frac{h}{\frac{1}{2}+h}\right]}{h}$$

Volendo trattare separatamente i termini $\mathrm{Cos}\left[\frac{1+h}{\frac{1}{2}+h}\right]$ e $-\frac{2\,\mathrm{Sin}\left[\frac{h}{\frac{1}{2}+h}\right]}{h}$, introduciamo per il solo secondo, la nuova variabile $z = \frac{h}{\frac{1}{2}+h}$ da cui h

```
Flatten[Solve[z == h/(1/2 + h), h], 1]
```

$$\left\{h \to -\frac{z}{2\,(-1+z)}\right\}$$

Il termine $-\frac{2\,\mathrm{Sin}\left[\frac{h}{\frac{1}{2}+h}\right]}{h}$ assume di conseguenza la forma più semplice

```
Simplify[-2 Sin[h/(1/2 + h)]/h /. {h -> -z/(2 (-1 + z))}]
```

$$\frac{4\,(-1+z)\,\mathrm{Sin}[z]}{z}$$

e il suo limite è

```
Limit[4 (-1 + z) Sin[z]/z, z → 0]
```

```
-4
```

Per l'***altro fattore*** del rapporto incrementale risulta

```
Limit[Cos[(1 + h)/(1/2 + h)], h → 0]
```

```
Cos[2]
```

per cui in definitiva si ha

```
Limit[-(2 Cos[(1+h)/(1/2+h)] Sin[h/(1/2+h)])/h, h → 0]
```

```
-4 Cos[2]
```

Numericamente il valore risulta

```
N[-4 Cos[2]]
```

```
1.66459
```

che coincide con quanto ***già trovato*** precedentemente per altra via.