Geometria

Sergio Polini

28 novembre 2008

Indice

1 Geometria affine **2**

2 Equazioni di rette e piani **4**
2.1 Retta in $\mathbb{R}^2$ . . . 4
2.2 Retta in $\mathbb{R}^3$ . . . 5
2.3 Piano in $\mathbb{R}^3$ . . . 6

3 Punti e rette **6**
3.1 Un solo punto . . . 6
3.1.1 Rette passanti per un punto . . . 6
3.1.2 Distanza di un punto da una retta . . . 7
3.2 Due punti . . . 8
3.2.1 Retta passante per due punti . . . 8

4 Punti e piani **9**
4.1 Un solo punto . . . 9
4.1.1 Piani passanti per un punto . . . 9
4.1.2 Distanza di un punto da un piano . . . 10
4.2 Due punti . . . 10
4.3 Tre punti . . . 10

5 Rette e rette **11**
5.1 Posizione reciproca di due rette . . . 11
5.1.1 Equazioni parametriche . . . 11
5.1.2 Equazioni cartesiane . . . 12
5.2 Distanza tra due rette . . . 13

6 Rette e piani **14**
6.1 Posizione reciproca di una retta e un piano . . . 14
6.1.1 Equazioni parametriche . . . 14
6.1.2 Equazioni parametrica e cartesiana . . . 14
6.1.3 Equazioni cartesiane . . . 15
6.2 Piani passanti per una retta . . . 15
6.3 Un piano, una retta e un punto . . . 16
6.4 Distanza tra una retta e un piano . . . 16

7 Piani e piani **16**
7.1 Posizione reciproca di due piani . . . 16
7.1.1 Equazioni parametriche . . . 16
7.1.2 Equazioni cartesiane . . . 17
7.2 Distanza tra due piani . . . 17

1 Geometria affine

Definizione 1.1. Si dice *spazio affine* di dimensione n un insieme A di elementi detti *punti* dotato di una funzione

$$f : A \times A \to V$$

a valori in un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale V di dimensione n e che gode delle seguenti proprietà:

a) per ogni $P \in A$ e per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste ed è unico un elemento $Q \in A$ tale che $f(PQ) = \mathbf{v}$ (f è biiettiva);

b) per ogni terna di punti $P, Q, R \in A$ vale la relazione:

$$f(PQ) + f(QR) = f(PR)$$

Uno spazio affine viene anche denotato con la terna (A, V, f). L'immagine di $f(PQ)$ viene detta *vettore applicato* da P in Q e viene denotata con $\overrightarrow{PQ}$, o anche con $Q - P$. Il punto Q tale che $Q - P = \mathbf{v}$ viene anche denotato con $P + \mathbf{v}$.

Proposizione 1.2. *Se A è uno spazio affine e P, Q sono due suoi elementi, allora:*

a) $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$*;*

b) $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$*.*

Dimostrazione. Dalla seconda proprietà degli spazi affini si ha:

$$\overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP}$$

quindi $\overrightarrow{PP}$ è l'elemento neutro della somma, ovvero $\mathbf{0}$.

Inoltre:

$$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$$

quindi $\overrightarrow{QP}$ è l'opposto di $\overrightarrow{PQ}$. □

Definizione 1.3. Uno spazio affine dotato di un prodotto scalare g viene detto *spazio euclideo.*

Definizione 1.4. Dato uno spazio affine (A, V, f) di dimensione n, si dice suo *sottospazio affine* di dimensione m, o m-piano, un sottoinsieme S di A tale che, considerando la restrizione di f a $S \times S$, con immagine $W \subset V$, essendo W di dimensione m, siano verificate le seguenti proprietà:

a) per qualsiasi coppia di punti (P, Q) in $S \times S$, il vettore $\overrightarrow{PQ}$ appartiene a W;

b) per qualsiasi $P \in S$ e $\mathbf{w} \in W$, il punto $Q = P + \mathbf{w}$ appartiene a S.

W viene detto *giacitura* di S.

Teorema 1.5. *Sia (A, V, f) uno spazio affine di dimensione n. Dati un sottospazio $W \subset V$ di dimensione m ed un punto $P \in A$, esiste uno ed un solo m-piano $(S, W, f|_{S \times S})$ tale che $P \in S$.*

Dimostrazione. S deve essere il sottoinsieme $\{Q \in A : \overrightarrow{PQ} \in W\}$ di A. Tale sottoinsieme è un m-piano in quanto:

a) se $Q_1, Q_2 \in S$, allora $\overrightarrow{PQ_1}$ e $\overrightarrow{PQ_2} \in W$, ma anche i loro opposti e le loro combinazioni lineari, in quanto W è un sottospazio; si ha quindi:

$$\overrightarrow{Q_1P} + \overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{Q_1Q_2} \in W$$

b) se $Q_1 \in S$ e $\mathbf{w} \in W$, il punto $Q_2 \in A$ tale che $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \mathbf{w}$ verifica la relazione:

$$\overrightarrow{PQ_2} = \overrightarrow{PQ_1} + \overrightarrow{Q_1Q_2} = \overrightarrow{PQ_1} + \mathbf{w}$$

quindi $\overrightarrow{PQ_2} \in W$ e $Q_2 \in S$.

S è inoltre unico. Se S' fosse un altro m-piano passante per P e avente giacitura W, per ogni $Q \in S'$ si avrebbe $Q = P + \mathbf{w}$, quindi $Q \in S$, quindi $S' \subseteq S$. Per ogni $Q \in S$, invece, si ha $\overrightarrow{PQ} \in W$, ma, poiché S' ha giacitura W e passa per P, Q deve appartenere anche ad S', quindi $S \subseteq S'$. Ne segue $S = S'$. □

In altri termini, il teorema afferma che un sottospazio affine è univocamante individuato da uno qualunque dei suoi punti e dalla sua giacitura e può essere denotato con:

$$S = \{Q \in A : Q = P + \mathbf{w}, \forall \mathbf{w} \in W\}$$

Ovvero, se $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ è una base di W, poiché $\mathbf{w} = t_1\mathbf{w}_1 + \cdots + t_m\mathbf{w}_m$, il sottospazio S può essere descritto con l'*equazione parametrica*:

$$Q = P + t_1\mathbf{w}_1 + \cdots + t_m\mathbf{w}_m$$

Definizione 1.6. Dato uno spazio affine A con spazio vettoriale associato V di dimensione n, fissati un punto $O \in A$ detto *origine* ed una base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V, si dice *riferimento affine*, o *sistema di coordinate affini*, in A l'insieme $\{O, v_1, \ldots, v_n\}$. Per ogni punto P di A si ha:

$$P = O + t_1\mathbf{v}_1 + \cdots + t_n\mathbf{v}_n$$

per opportuni $t_1, \ldots, t_n$, detti *coordinate* (*affini*) di P rispetto al riferimento $O; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. I punti $U_i = O + \mathbf{v}_i$ vengono detti *punti unità*, e le rette $P_i = O + t_i\mathbf{v}_i$ *assi*, del riferimento affine.

Definizione 1.7. Dato uno spazio euclideo E dotato di un prodotto scalare g, si dice *riferimento cartesiano* un riferimento affine $O; \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ con $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ base g-ortogonale di V.

Teorema 1.8. *Siano A uno spazio affine di dimensione n, S un m-piano di A, $O; \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ un riferimento affine. Esiste allora un sistema di $n-m$ equazioni lineari indipendenti in n incognite $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tale che un punto P di coordinate $(x_1, \ldots, x_n)$ rispetto al riferimento affine dato appartiene a S se e solo se la n-upla delle sue coordinate è soluzione del sistema.*

Viceversa, assegnato arbitrariamente un sistema di $n-m$ equazioni lineari indipendenti $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, esiste uno ed un solo m-piano le coordinate dei cui punti siano soluzioni di questo.

2 Equazioni di rette e piani

Rette e piani possono essere rappresentati sia con equazioni parametriche, sia con equazioni cartesiane. Le due rappresentazioni sono equivalenti, ma alcuni problemi si risolvono meglio con le une, alcuni con le altre. Ad esempio, per trovare il piano passante per una retta ed un punto conviene partire dall'equazione parametrica della retta (sez. 6.3), ma se si ha l'equazione cartesiana di un piano si trovano subito altri piani paralleli ad esso (sez. 7.1.2). Inoltre, per trovare una retta che soddisfi due condizioni (ortogonale ad un'altra e contenuta in un piano, o simili) conviene spesso chiedersi se quelle condizioni possano tradursi nella definizione di due piani; in caso affermativo, le equazioni cartesiane dei due piani saranno anche quelle della retta loro intersezione.

Questa sezione passa quindi in rassegna le equazioni parametriche e cartesiane di rette (in $\mathbb{R}^2$ ed in $\mathbb{R}^3$) e piani (in $\mathbb{R}^3$) e le tecniche di conversione dalle une alle altre.

2.1 Retta in $\mathbb{R}^2$

L'equazione parametrica di una retta in $\mathbb{R}^2$ presuppone dato un suo punto $P_0 = (x_0, y_0)$, a cui si devono aggiungere i multipli di un *vettore direttore*:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \qquad \text{ovvero:} \qquad \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \end{cases}$$

L'equazione cartesiana, $ax + by = c$, si ricava eliminato t:

$$t = \frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \quad \Rightarrow \quad m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad mc - ly = mx_0 - ly_0$$

e ponendo $a = m$, $b = -l$, $c = mx_0 - ly_0$.[1]

Viceversa, dall'equazione cartesiana si ottiene l'equazione parametrica semplicemente risolvendola. Dal momento che vi sono ∞^1 soluzioni, si pone $x = t$ oppure $y = t$. Ad esempio:

$$ax + by = c \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{c}{b} - \dfrac{at}{b} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ c/b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -a/b \end{pmatrix}$$

Moltiplicando $(1, -a/b)$ per $-b$ si ottiene:

$$ax + by = c \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 \\ c/b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$

quindi ancora:

$$l = -b, \qquad m = a$$

[1] Il coefficiente angolare della retta è $\frac{m}{l}$. Dall'equazione cartesiana si ha $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, e infatti $-\frac{a}{b} = \frac{m}{l}$.

2.2 Retta in $\mathbb{R}^3$

Una retta in $\mathbb{R}^3$ viene individuata come intersezione di due piani (non paralleli). La sua equazione parametrica è analoga a quella in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} \qquad \text{ovvero:} \qquad \begin{cases} x = x_0 + tl \\ y = y_0 + tm \\ z = z_0 + tn \end{cases}$$

ma occorrono due equazioni cartesiane (una per ciascun piano). Si può partire da:

$$\begin{cases} t = (x - x_0)/l \\ t = (y - y_0)/m \\ t = (z - z_0)/n \end{cases}$$

ed eguagliare una delle tre equazioni alle altre due. Dal momento che uno o due dei *parametri direttori* (l, m e n) possono essere nulli, si sceglie l'equazione con parametro non nullo:

a) se $l \neq 0$: $\begin{cases} m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \\ n(x - x_0) - l(z - z_0) = 0 \end{cases}$

b) se $m \neq 0$: $\begin{cases} l(y - y_0) - m(x - x_0) = 0 \\ n(y - y_0) - m(z - z_0) = 0 \end{cases}$

c) se $n \neq 0$: $\begin{cases} m(z - z_0) - n(y - y_0) = 0 \\ m(z - z_0) - n(y - y_0) = 0 \end{cases}$

Si perviene così ad equazioni cartesiane del tipo:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

che sono le equazioni di due piani la cui intersezione è appunto una retta.[2]

Da tali equazioni si ottiene l'equazione parametrica risolvendo il sistema, che ha ancora ∞^1 soluzioni, ponendo $x = t$ o $y = t$ oppure $z = t$. Si può comunque dimostrare che:[3]

$$l = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \qquad m = -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad n = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

[2] A condizione che i due piani non siano paralleli, cioè che le due equazioni siano indipendenti; ciò equivale a dire che la matrice dei loro coefficienti deve avere rango 2.

[3] Una retta r appartiene a due piani; il suo sottospazio di giacitura ($\mathcal{L}(\mathbf{v})$) deve quindi essere contenuto nei sottospazi di giacitura dei due piani, ovvero $\mathbf{v} = (l, m, n)$ deve appartenere ad essi. Poiché il sottospazio di giacitura di un piano $\pi : ax + by + cz = d$ è espresso dall'equazione $ax + by + cz = 0$ (i sottospazi di giacitura sono espressi mediante i sistemi omogenei associati a quelli che esprimono gli spazi affini che "giacciono" su di essi), deve risultare: $al + bm + cn = a'l + b'm + c'n = 0$. Calcolando i determinanti:

$$\begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = a' \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - b' \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + c' \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = 0 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a' & b' & c' \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

si vede che ciò accade per (l, m, n) uguale, o anche proporzionale, a $\left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$.

2.3 Piano in $\mathbb{R}^3$

L'equazione parametrica di un piano in $\mathbb{R}^3$ presuppone dato un suo punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e due *vettori di giacitura* linearmente indipendenti:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix} \qquad \text{ovvero:} \qquad \begin{cases} x = x_0 + sl + tl' \\ y = y_0 + sm + tm' \\ z = z_0 + sn + tn' \end{cases}$$

L'equazione cartesiana, $ax + by + cz = d$, si ricava eliminando i parametri s e t, in modo analogo a quanto visto per l'equazione parametrica di una retta. Si può anche dimostrare che:[4]

$$a = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} \qquad b = -\begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix} \qquad c = \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix}$$

Una volta trovati i coefficienti, d si trova sostituendo a (x, y, z) le coordinate di P_0:

$$d = ax_0 + by_0 + cz_0$$

Dall'equazione cartesiana si ottiene quella parametrica semplicemente risolvendola. Dal momento che vi sono ∞^2 soluzioni, si pongono due delle tre variabili uguali ai parametri.

3 Punti e rette

3.1 Un solo punto

3.1.1 Rette passanti per un punto

Per trovare tutte le rette che passano per un dato punto $P_0 = (x_0, y_0)$:

a) l'*equazione parametrica* è $P = P_0 + t\mathbf{v}$, ovvero:

$$\forall l, m \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$$

infatti ponendo $t = 0$, quale che sia il vettore direttore la retta passa per P_0;

b) l'*equazione cartesiana* si ricava osservando che l'equazione generica è $ax + bx = c$ e che deve essere soddisfatta anche per il punto dato, quindi deve valere anche $ax_0 + by_0 = c$; poiché entrambi i primi membri sono uguali a c, si ottiene:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \quad ax + by = ax_0 + by_0$$

[4] I vettori di giacitura devono appartenere al sottospazio di giacitura $ax + by + cz = 0$ (cfr. nota 3). Deve quindi risultare $al + bm + cn = al' + bm' + cn' = 0$, e il sistema omogeneo composto dalle tre equazioni (con incognite a, b, c) deve ammettere infinite soluzioni; deve quindi valere:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} x - \begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} = 0$$

e le infinite soluzioni sono date da (a, b, c) uguale o proporzionale a $\left(\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} l & n \\ l' & n' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} l & m \\ l' & m' \end{vmatrix} \right)$.

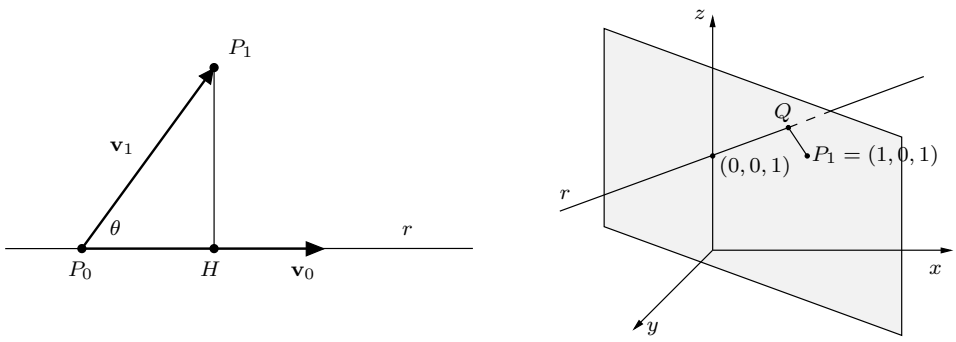

Figura 1. Distanza di un punto P_1 da una retta $P_0+t\mathbf{v}$ come distanza di P_1 dalla sua proiezione ortogonale su r (a sinistra) e come distanza di P_1 dall'intersezione di r con un piano π ortogonale a r e passante per P_1 (a destra).

3.1.2 Distanza di un punto da una retta

Si può procedere in due modi.

La distanza di un punto P_1 da una retta r è la distanza tra P_1 e la sua proiezione ortogonale H su r (v. Figura 1 a sinistra). Considerando il triangolo rettangolo P_0P_1H, si vede che:

$$d(P_1, r) = d(P_1, H) = \|\mathbf{v}_1\| \, |\sin\theta| = \|\mathbf{v}_1\|\sqrt{1-(\cos\theta)^2} =$$
$$= \|\mathbf{v}_1\|\sqrt{1-\frac{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1\rangle^2}{\|\mathbf{v}_0\|^2\|\mathbf{v}_1\|^2}} = \sqrt{\|\mathbf{v}_1\|^2 - \frac{\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1\rangle^2}{\|\mathbf{v}_0\|^2}}$$

Ad esempio, se r è la retta $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e si ha:

$$d(P_1, r) = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si può anche calcolare la distanza tra il punto P_1 e l'intersezione tra la retta ed un piano π ortogonale alla retta e passante per P_1 (Figura 1 a destra). L'equazione cartesiana della retta r data sopra è:

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$$

L'equazione cartesiana cartesiana generica di un piano ortogonale a r (che ha coefficienti uguali alle componenti del vettore direttore di r; cfr. sez. 6.1.2) è $-x+y = d$; per ottenere il piano, tra questi, che passi per P_1, cioè per ottenere d, si impone che l'equazione sia soddisfatta per $(x, y, z) = (1, 0, 1)$:

$$\pi : -x + y = -1$$

Il sistema costituito dalle tre equazioni ha come soluzione il punto $Q = (1/2, -1/2, 1)$, intersezione tra r e π. La lunghezza di $P_1 - Q = (1/2, 1/2, 0)$ è:

$$d(P_1, Q) = d(P_1, r) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Se si è in $\mathbb{R}^2$ e si ha l'equazione cartesiana della retta si ha un'ulteriore possibilità; si può usare infatti la formula:[5]

$$d(P_1, r) = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

3.2 Due punti

3.2.1 Retta passante per due punti

Per trovare la retta passante per i punti $P_0(x_0, y_0)$ e $P_1 = (x_1, y_1)$ in $\mathbb{R}^2$:

a) l'*equazione parametrica* è $P = P_0 + t(P_1 - P_0)$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \end{pmatrix}$$

b) l'*equazione cartesiana* si ricava dalla formula:[6]

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

da cui si ottiene:

$$(y_1 - y_0)(x - x_0) - (x_1 - x_0)(y - y_0) = 0$$

In $\mathbb{R}^3$:

a) l'*equazione parametrica* è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix}$$

b) le equazioni cartesiane si ricavano dalla parametrica come visto nella sezione 2.2, ponendo $l = x_1 - x_0$, $m = y_1 - y_0$ e $n = z_1 = z_0$; quindi:

- se $x1 \neq x_0$: $\begin{cases} (x - x_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(x_1 - x_0) = 0 \\ (x - x_0)(z_1 - z_0) - (z - z_0)(x_1 - x_0) = 0 \end{cases}$
- se $y1 \neq y_0$: $\begin{cases} (y - y_0)(x_1 - x_0) - (x - x_0)(y_1 - y_0) = 0 \\ (y - y_0)(z_1 - z_0) - (z - z_0)(y_1 - y_0) = 0 \end{cases}$

[5] Per la dimostrazione, v. il caso analogo della distanza di un punto da un piano, sez. 4.1.2. Da notare che la formula dipende dalla forma dell'equazione della retta: se questa è del tipo $ax + bx + c = 0$, la formula va scritta:

$$d(P_1, r) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

[6] La formula si basa sull'uguaglianza dei rapporti $\frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$ per qualsiasi coppia di punti della retta:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

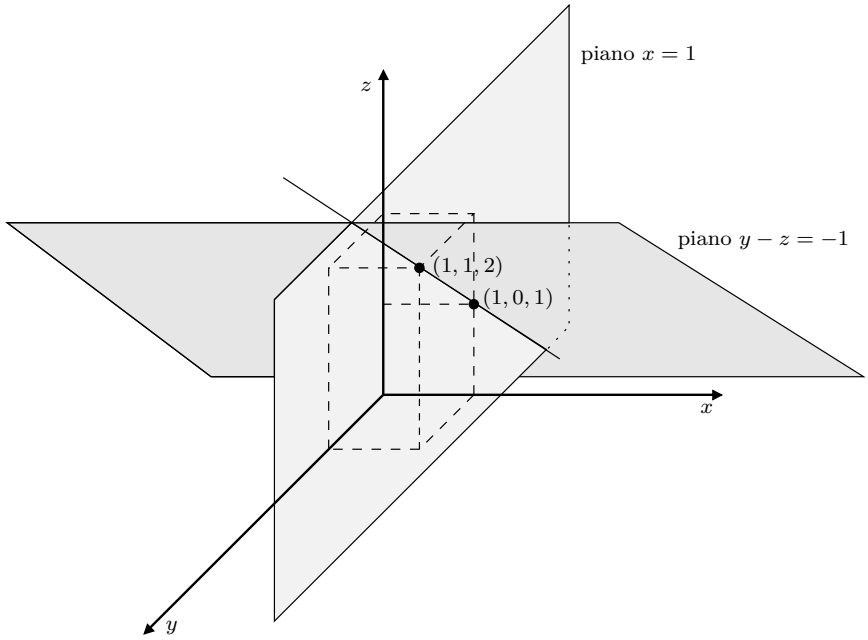

Figura 2. Retta per due punti in $\mathbb{R}^3$.

- se $z1 \neq z_0$: $\begin{cases} (z - z_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(z_1 - z_0) = 0 \\ (z - z_0)(y_1 - y_0) - (y - y_0)(z_1 - z_0) = 0 \end{cases}$

Ad esempio, la retta passante per i punti $P_0 = (1, 0, 1)$ e $P_1 = (1, 1, 2)$ è:

- $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- poiché $x_1 = x_0$, ma $y_1 \neq y_0$, scegliamo la seconda coppia di equazioni (v. Figura 2):

$$\begin{cases} (y - 0)(0 - 0) - (x - 1)(1 - 0) = 0 \\ (y - 0)(2 - 1) - (z - 1)(1 - 0) = 0 \end{cases} = \begin{cases} x = 1 \\ y - z = -1 \end{cases}$$

4 Punti e piani

4.1 Un solo punto

4.1.1 Piani passanti per un punto

Per trovare tutti i piani passanti per un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

a) l'*equazione parametrica* è $P = P_0 + s\mathbf{v} + t\mathbf{w}$, ovvero:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} l' \\ m' \\ n' \end{pmatrix}$$

b) l'*equazione cartesiana* si trova come già visto nella sezione 3.1.1:

$$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$$

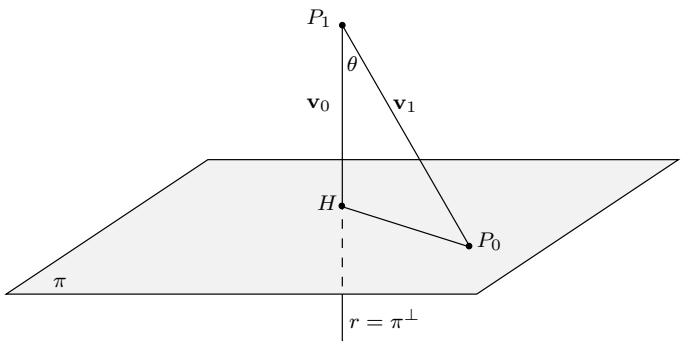

Figura 3. Distanza di un punto da un piano.

4.1.2 Distanza di un punto da un piano

Per calcolare la distanza tra un punto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ed un piano π conviene avvalersi dell'equazione cartesiana del piano, $ax + bx + cx = d$.

Si tratta di calcolare la distanza tra P_1 e la sua proiezione ortogonale H su π (Fig. 3). Scelto un punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ del piano e considerando il triangolo P_0P_1H, si ha:

$$d(P_1, \pi) = d(P_1, H) = \|\mathbf{v}_1\| \, |\cos\theta| = \frac{|\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle|}{\|\mathbf{v}_0\|}$$

Dal momento che $\mathbf{v}_0 = (a, b, c)$ in quanto vettore direttore di una retta ortogonale al piano (cfr. sez. 6.1.2), che $\mathbf{v}_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$ e che $ax_0 + by_0 + cz_0 = d$ in quanto P_0 appartiene a π, si ha:[7]

$$\begin{aligned} d(P_1, \pi) &= \frac{|a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) + c(z_1 - z_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

4.2 Due punti

Trovare tutti i piani passanti per due punti, equivale a trovare tutti i piani che contengono la retta contenente i due punti (sez. 6.2).

4.3 Tre punti

Se tre punti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ sono allineati, allora i vettori $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$ sono proporzionali (linearmente dipendenti), e ci si riconduce al caso precedente. In caso contrario, per trovare il piano passante per i tre punti:

[7] Anche in questo caso (cfr. nota 5) la formula dipende dalla forma dell'equazione del piano: se questa è del tipo $ax + by + cz + d = 0$, la formula diventa:

$$d(P_1, \pi) = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

a) l'*equazione parametrica* è:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} x_1 - x_0 \\ y_1 - y_0 \\ z_1 - z_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} x_2 - x_0 \\ y_2 - y_0 \\ z_2 - z_0 \end{pmatrix}$$

b) quanto all'*equazione cartesiana*, si può considerare che il generico vettore $P - P_0$ deve essere linearmente dipendente da $P_1 - P_0$ e $P_2 - P_0$, quindi deve risultare:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 & x_2 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 & y_2 - y_0 \\ z - z_0 & z_1 - z_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0$$

ad esempio, il piano passante per $P_0 = (1, 0, 0)$, $P_1 = (0, 0, 1)$ e $P_2 = (1, 1, 1)$ è:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & -1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(x - 1) + (y - z) = 0 \quad \Rightarrow \quad -x + y - z = -1$$

5 Rette e rette

Due rette r_1 e r_2 si dicono:

a) *complanari* se esiste un piano π che le contiene;

b) *parallele* se sono coincidenti, oppure se sono complanari e $r_1 \cap r_2 = \varnothing$;

c) *incidenti* se hanno un punto in comune: $r_1 \cap r_2 = \{P\}$ (in tal caso sono anche complanari);

d) *sghembe* se non sono complanari;

e) *ortogonali* se sono ortogonali i loro vettori direttori, cioè se il loro prodotto scalare è nullo.

Da notare che due rette possono essere ortogonali anche se non sono incidenti.

5.1 Posizione reciproca di due rette

5.1.1 Equazioni parametriche

In $\mathbb{R}^2$ due rette possono essere solo parallele o incidenti; sono parallele se i loro vettori direttori sono proporzionali (coincidenti se un qualsiasi punto dell'una appartiene anche all'altra), incidenti in caso contrario.

In $\mathbb{R}^3$, date le equazioni:

$$r_1 : P_1 + t\mathbf{v}_1$$
$$r_2 : P_2 + s\mathbf{v}_2$$

a) se v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti (proporzionali), le rette sono *parallele*; sono anche *coincidenti* se un qualsiasi punto dell'una appartiene anche all'altra, ad esempio se esiste un valore di t tale che $P_2 = P_1 + t\mathbf{v}_1$;

b) in caso contrario,

– sono incidenti (quindi *complanari*) se hanno un punto in comune, ovvero se il sistema:

$$P_1 + t\mathbf{v}_1 = P_2 + s\mathbf{v}_2$$

ammette soluzione, cioè se v_1, v_2 e $P_2 - P_1$ sono linearmente dipendenti;[8]

– sono *sghembe* (quindi *non complanari*) se v_1, v_2 e $P_2 - P_1$ sono linearmente indipendenti;

sono inoltre ortogonali se $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$.

5.1.2 Equazioni cartesiane

In $\mathbb{R}^2$ le rette sono *incidenti* se e solo se il sistema:

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y = b_2 \end{cases}$$

ammette soluzione. Ciò avviene se sia la matrice dei coefficienti che la matrice orlata hanno rango 2, quindi se $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0$.

Sono inoltre *ortogonali* se:

$$a_{1,2}a_{2,2} + a_{1,1}a_{2,1} = 0$$

Sono infatti ortogonali se è nullo il prodotto scalare dei vettori direttori $\mathbf{v}_1 = (l, m)$ e $\mathbf{v}_2 = (l', m')$, cioè se $ll' + mm' = 0$, ma $a_{1,1} = m$, $a_{1,2} = -l$, $a_{2,1} = m'$, $a_{2,2} = -l'$ (v. sez. 2.1).

Sono invece parallele se il determinante della matrice dei coefficienti è nullo ($a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = 0$), coincidenti se le due equazioni sono proporzionali, cioè se il rango della matrice orlata è 1 (riducendo a gradini, una delle due righe si annulla).

In $\mathbb{R}^3$ le due rette sono espresse ciascuna mediante una coppia di equazioni. Si ha così un sistema di quattro equazioni:

$$\begin{cases} r_1 : \begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2 \end{cases} \\ r_2 : \begin{cases} a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3 \\ a_{4,1}x + a_{4,2}y + a_{4,3}z = b_4 \end{cases} \end{cases}$$

[8] Il sistema può essere scritto:

$$\begin{cases} P_{1,1} + tv_{1,1} = P_{2,1} + sv_{2,1} \\ P_{1,2} + tv_{1,2} = P_{2,2} + sv_{2,2} \\ P_{1,3} + tv_{1,3} = P_{2,3} + sv_{2,3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tv_{1,1} - sv_{2,1} = P_{2,1} - P_{1,1} \\ tv_{1,2} - sv_{2,2} = P_{2,2} - P_{1,2} \\ tv_{1,3} - sv_{2,3} = P_{2,3} - P_{1,3} \end{cases}$$

(le incognite, ovviamente, sono t e s). La matrice orlata è:

$$\begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} & P_{2,1} - P_{1,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} & P_{2,2} - P_{1,2} \\ v_{1,3} & v_{2,3} & P_{2,3} - P_{1,3} \end{pmatrix}$$

dal momento che la matrice dei coefficienti ha rango 2 (due colonne, con v_1 e v_2 linearmente indipendenti), se la matrice orlata avesse rango 3 (v_1, v_2 e $P_2 - P_1$ linearmente indipendenti) il sistema sarebbe incompatibile (Teorema di Rouché-Capelli).

Si devono esaminare i ranghi della matrice dei coefficienti $\mathbf{A}$ e di quella orlata $\mathbf{A}|\mathbf{b}$:

a) se la matrice $\mathbf{A}$ ha rango 2 le due rette sono *parallele*;[9]
   - se la matrice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ ha anch'essa rango 2, le rette sono *coincidenti* (le due coppie di equazioni esprimono la stessa retta; si può anche pensare che il sistema è compatibile, ma ammette ∞^1 soluzioni, tanti quanti sono i punti di una retta);
   - se la matrice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ ha rango 3, le rette sono *non coincidenti* (il sistema non ammette soluzioni, quindi non vi sono punti comuni alle due rette);

b) se la matrice $\mathbf{A}$ ha rango 3, le rette possono essere:
   - *incidenti* se anche la matrice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ ha rango 3 (il sistema è compatibile e determinato; la sua soluzione è il punto di incidenza);
   - *sghembe* se la matrice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ ha rango 4 (il sistema è incompatibile: le rette non hanno punti in comune).

   sono inoltre *ortogonali* se è nullo il prodotto scalare dei loro vettori direttori, che si ricavano come visto nella sez. 2.2.

5.2 Distanza tra due rette

Il calcolo della distanza tra due rette ha senso solo se esse non sono coincidenti, quindi se sono parallele o sghembe.

Se sono parallele, è sufficiente calcolare la distanza tra un punto qualsiasi dell'una e l'altra (sez. 3.1.2).

Se sono sghembe, si deve calcolare la distanza tra una delle due rette ed il piano parallelo a questa e contenente l'altra.

Siano:

$$\begin{aligned} r_0 &: P_0 + t\mathbf{v}_0 \qquad & \mathbf{v}_0 &= (l_0, m_0, n_0) \\ r_1 &: P_1 + s\mathbf{v}_1 \qquad & \mathbf{v}_1 &= (l_1, m_1, n_1) \end{aligned}$$

Il piano π contenente r_1 e parallelo a r_0 ha equazione parametrica:

$$\pi : P = P_1 + t\mathbf{v}_0 + s\mathbf{v}_1$$

Si tratta ora di convertire l'equazione del piano in cartesiana, per poi applicare la formula della distanza tra un punto (in questo caso P_0) e un piano (sez. 4.1.2).

[9] Due rette parallele in due spazi affini sono coincidenti sui rispettivi sottospazi di giacitura (differiscono solo per la traslazione rispetto all'origine; ad esempio, in $\mathbb{R}^2$ le rette $y = mx + b$ e $y = mx + c$, con $b \neq c$, differiscono solo per l'intercetta, ma coincidono nel sottospazio di giacitura, che è per entrambe $y = mx$). Per considerare i sottospazi di giacitura basta considerare il sistema omogeneo associato; questo ammette infinite soluzioni (gli infiniti punti di una retta) se e solo se il rango della matrice $\mathbf{A}$ è minore del numero delle incognite.

6 Rette e piani

6.1 Posizione reciproca di una retta e un piano

6.1.1 Equazioni parametriche

Date le equazioni:

$$\begin{aligned} r &: P = P_0 + s\mathbf{v}_0 \\ \pi &: P = P_1 + t\mathbf{v}_1 + t'\mathbf{v}_2 \qquad\qquad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \text{ linearmente indipendenti} \end{aligned}$$

la retta e il piano sono *incidenti* se l'equazione:

$$P_0 + s\mathbf{v}_0 = P_1 + t\mathbf{v}_1 + t'\mathbf{v}_2$$

ammette una ed una sola soluzione (s, t, t'), cioè se i vettori v_0, v_1, v_2 sono linearmente indipendenti.[10] Sono inoltre *ortogonali* se il vettore direttore della retta è ortogonale ad entrambi i vettori di giacitura del piano, cioè se:

$$\langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1 \rangle = \langle \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_2 \rangle = 0$$

Se invece v_0 è combinazione lineare di v_1, v_2:

a) la retta è contenuta nel piano se anche $P_1 - P_0$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$;

b) è *parallela* al piano se $v_1, v_2, P_1 - P_0$ sono linearmente indipendenti.

6.1.2 Equazioni parametrica e cartesiana

Se le equazioni sono:

$$\begin{aligned} r &: P = P_0 + t\mathbf{v} \qquad\qquad P_0 = (x_0, y_0, z_0),\ \mathbf{v} = (l, m, n) \\ \pi &: ax + by + cz = d \end{aligned}$$

retta e piano sono *paralleli* se e solo se il vettore direttore della retta appartiene al sottospazio di giacitura del piano, quindi se e solo se:

$$al + bm + cn = 0$$

In tal caso, la retta è *contenuta* nel piano se e solo se $P_0 \in \pi$, cioè se e solo se:

$$ax_0 + by_0 + cz_0 = d$$

Retta e piano sono invece *incidenti* se $al + bm + cn \neq 0$ e, in particolare, *ortogonali* se $a = l$, $b = m$ e $c = n$.[11]

---

[10] Il sistema assume la forma:

$$\begin{cases} v_{0,1}s - v_{1,1}t - v_{2,1}t' = P_{1,1} - P_{0,1} \\ v_{0,2}s - v_{1,2}t - v_{2,2}t' = P_{1,2} - P_{0,2} \\ v_{0,3}s - v_{1,3}t - v_{2,3}t' = P_{1,3} - P_{0,3} \end{cases}$$

ed è compatibile e determinato solo se la matrice dei coefficienti ha rango 3, quindi se i tre vettori sono linearmente indipendenti.

[11] Ricordando la corrispondenza biunivoca tra vettori e punti del piano, si può dire che, se la retta r

6.1.3 Equazioni cartesiane

Date le equazioni:

$$\begin{cases} r: \begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2 \end{cases} \\ \pi: \quad a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3 \end{cases}$$

retta e piano sono:

a) *incidenti*, se la matrice dei coefficienti ha rango 3 (l'unica soluzione del sistema è il punto di incidenza); in particolare, sono:
   - *ortogonali* se i coefficienti del piano sono le componenti del vettore direttore della retta, quindi se (cfr. sez. 2.2):

$$a_{3,1} = \begin{vmatrix} a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,2} & a_{2,3} \end{vmatrix} \qquad a_{3,2} = -\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,3} \end{vmatrix} \qquad a_{3,3} = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,1} \end{vmatrix}$$

b) l'una *contenuta* nell'altro se il sistema ammette ∞^1 soluzioni (i punti comuni), cioè se la matrice dei coefficienti e quella orlata hanno entrambe rango 2;

c) *paralleli* se il sistema è incompatibile (nessun punto in comune), cioè se il rango della matrice dei coefficienti è minore del rango della matrice orlata.

6.2 Piani passanti per una retta

Per trovare tutti i piani passanti per una retta:

a) se la retta è espressa con *equazione parametrica*, $P = P_0 + t\mathbf{v}_0$, il vettore direttore della retta può essere considerato come uno dei due vettori di giacitura degli infiniti piani, che avranno equazione:

$$\pi : P = P_0 + t\mathbf{v}_0 + s\mathbf{v} \qquad \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3;\ \mathbf{v}, \mathbf{v}_0 \text{ linearmente indipendenti}$$

b) se la retta è espressa con *equazioni cartesiane*:

$$\begin{cases} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = d_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = d_2 \end{cases}$$

un piano di equazione

$$a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = d_3$$

contiene al retta se e solo se le matrici dei coefficienti e orlata del sistema delle tre equazioni hanno entrambe rango 2 (v. sez. 6.1.3), quindi se $(a_{3,1}, a_{3,2}, a_{3,3}, d_3)$ è combinazione lineare di $(a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3}, d_1)$ e $(a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, d_2)$; l'equazione degli infiniti piani passanti per una retta, pertanto, è:

$$(\lambda a_{1,1} + \mu a_{2,1})x + (\lambda a_{1,2} + \mu a_{2,2})y + (\lambda a_{1,3} + \mu a_{2,3})z = \lambda d_1 + \mu d_2$$

---

di vettore direttore $\mathbf{v} = (l, m, n)$ è ortogonale al piano π, lo interseca in un punto $\mathbf{p} = (x_0, y_0, z_0)$ e per qualsiasi punto $\mathbf{x} = (x, y, z)$ del piano deve aversi:

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = l(x - x_0) + m(y - y_0) + n(z - z_0) = 0$$

da cui:

$$lx + mx + nz = lx_0 + my_0 + nz_0$$

e si ha quindi l'equazione di π ponendo $a = l$, $b = m$, $c = n$ e $d = lx_0 + my_0 + nz_0$.

con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

6.3 Un piano, una retta e un punto

Per trovare il piano passante per una retta r ed un punto P_1 non contenuto in essa:

a) se si ha l'*equazione parametrica* della retta, $P = P_0 + t\mathbf{v}_0$, il suo vettore direttore è uno dei vettori di giacitura del piano; l'altro può essere $\mathbf{v}_1 = P_1 - P_0$, quindi:

$$\pi : P = P_0 + t\mathbf{v}_0 + s\mathbf{v}_1 = P_0 + t\mathbf{v}_0 + s(P_1 - P_0)$$

b) se la retta è espressa con *equazioni cartesiane*... conviene passare all'equazione parametrica.

6.4 Distanza tra una retta e un piano

Se retta e piano sono incidenti, la distanza è zero. Se sono paralleli, basta calcolare la distanza tra un qualsiasi punto della retta e il piano (sez. 4.1.2).

7 Piani e piani

7.1 Posizione reciproca di due piani

Due piani possono essere *incidenti* se si intersecano in una retta, *paralleli* se non si intersecano o sono *coincidenti*.

7.1.1 Equazioni parametriche

Dati i piani:

$$\begin{aligned} \pi_1 :&\ P_1 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{w}_1 \\ \pi_2 :&\ P_2 + s'\mathbf{v}_2 + t'\mathbf{w}_2 \end{aligned}$$

essi sono *paralleli* se i vettori di giacitura dell'uno sono combinazione lineare di quelli dell'altro, quindi se la matrice avente per righe i quattro vettori ha rango 2. Sono inoltre *coincidenti* se un qualsiasi punto dell'uno appartiene all'altro, ad esempio, se il sistema nelle due incognite s, t:

$$P_2 = P_1 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{w}_1$$

ammette un'unica soluzione, quindi se $P_2 - P_1$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \mathbf{w}_1$.

Sono invece *incidenti* se il rango della matrice dei vettori di giacitura ha rango 3; in tal caso, infatti, il sistema nelle quattro incognite s, t, s', t':

$$P_1 + s\mathbf{v}_1 + t\mathbf{w}_1 = P_2 + s'\mathbf{v}_2 + t'\mathbf{w}_2$$

ammette ∞^1 soluzioni (gli infiniti punti di una retta). Sono inoltre *ortogonali* se sono tali due vettori ortogonali ad essi; per verificarlo, tuttavia, conviene usare le equazioni cartesiane dei due piani.

7.1.2 Equazioni cartesiane

Date le equazioni cartesiane di due piani:

$$\begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

i piani sono *paralleli* se il sistema non ammette soluzioni o ne ammette ∞^2 (in tale ultimo caso i piani sono *coincidenti*); quindi i piani sono:

a) *paralleli non coincidenti* se la matrice dei coefficienti ha rango 1 e la matrice orlata ha rango 2 (sistema incompatibile, nessun punto in comune);

b) *paralleli e coincidenti* se entrambe le matrici hanno rango 1.

Da questo segue che due piani sono paralleli e coincidenti se le loro equazioni sono l'una un multiplo dell'altra e che sono paralleli non coincidenti se:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

In particolare, dato un piano di equazione $ax + by + cz = d$, il generico piano parallelo ad esso ha equazione $ax + by + cz = \lambda$ per qualsiasi $\lambda \in \mathbb{R}$.

I due piani sono *incidenti* se la matrice dei coefficienti ha rango 2 (le ∞^1 soluzioni sono gli infiniti punti di una retta).

Sono infine *ortogonali* se sono ortogonali due vettori rispettivamente ortogonali ai due piani, cioè se:

$$aa' + bb' + cc' = 0$$

7.2 Distanza tra due piani

La distanza tra due piani è nulla se essi sono incidenti; se sono invece paralleli, si calcola come distanza tra un punto qualsiasi dell'uno e l'altro.